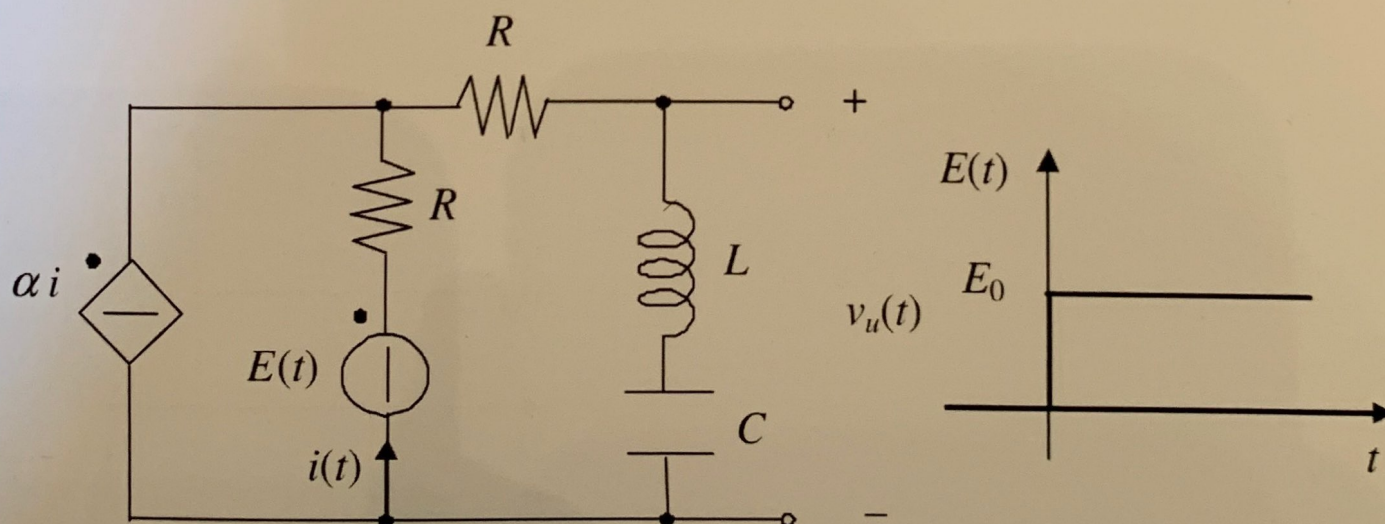


Francesco Bertoncini

ESERCIZIARIO DI ELETTROTECNICA



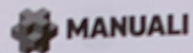
$$E_0 = 100 \text{ V}, \alpha = 2, R = 100 \, \Omega, C = 10 \, \mu\text{F}, L = 1 \text{ mH}$$



Francesco Bertoncini

Eserciziario di Elettrotecnica

PISA
UNIVERSITY
PRESS



Bertoncini, Francesco
Eserciziario di elettrotecnica / Francesco Bertoncini. - Pisa : Pisa university press, c2013
(Didattica e ricerca. Manuali)

621.3076 (21.)

1. Elettrotecnica - Esercizi

CIP a cura del Sistema bibliotecario dell'Università di Pisa

MEMBRO DEL COORDINAMENTO
UNIVERSITY PRESS ITALIANE

UPI
UNIVERSITY
PRESS ITALIANE

* Copyright 2013 by Pisa University Press srl
Società con socio unico Università di Pisa
Capitale Sociale € 20.000.000 i.u. - Partita IVA 02047390503
Sede legale: Lungarno Pacinotti 43/44 - 56126 Pisa
Tel. + 39 050 2221056 Fax + 39 050 2221045
press@unipi.it
www.pisauniversitypress.it

ISBN 978-88-6741-222-9

progetto grafico: Andrea Rosellini

Le fotocopie per uso personale del lettore possono essere effettuate nei limiti del 15% di ciascun volume/fascicolo di periodico dietro pagamento alla SIAE del compenso previsto dall'art. 17, comma 4 e 5, della legge 17 aprile 1941 n. 633. Le riproduzioni effettuate per finalità di carattere professionale, economico o commerciale o comunque per uso diverso da quello personale possono essere effettuate a seguito di specifica autorizzazione rilasciata da CLEARedi - Centro Licenze e Autorizzazioni per le Riproduzioni Editoriali - Corso di Porta Romana, 108 - 20122 Milano - Tel. (+39) 02 83236204 - E-mail: info@clearedi.org - Sito web: www.clearedi.org

Indice

Prefazione	ix
------------------	----

Capitolo 1

CIRCUITI RESISTIVI 1

1.1 Sezione A – Esercizi svolti e commentati	1
1.1.1 – Principio di sovrapposizione degli effetti, circuiti equivalenti ..	1
1.1.2 – Teorema di Thévenin	3
1.1.3 – Principio di sovrapposizione degli effetti, partitore di corrente	5
1.1.4 – Teorema di Thévenin, modifica topologica generatore di	
tensione, partitore di tensione	9
1.1.5 – Circuiti equivalenti.....	12
1.1.6 – Teorema di Norton.....	15
1.1.7 – Resistenza equivalente di un bipolo, macro nodo.....	17
1.1.8 – Metodo delle tensioni di nodo.....	18
1.1.9 – Metodo delle correnti di maglia	19
1.1.10 – Circuiti equivalenti, teorema di Millman	20
1.1.11 (*) – Potenza erogata e bilancio energetico	22
1.1.12 (*) – Equivalente di Norton e di Thévenin di generatori non	
ideali di tensione e di corrente, circuiti equivalenti	25
1.2 Sezione B – Esercizi con traccia della soluzione	28
1.2.1 – Circuito equivalente, teorema di Norton	28
1.2.2 – Metodo delle tensioni di nodo.....	29
1.2.3 – Metodo delle tensioni di nodo.....	31
1.2.4 – Modifica topologica generatore di tensione.....	32
1.2.5 – Teorema di Millman.....	33
1.3 Sezione C – Esercizi da svolgere.....	35
1.3.1 – Calcolo di correnti.....	35
1.3.2 – Equivalente Thevenin	35
1.3.3 – Calcolo di potenze.....	35
1.3.4 – Calcolo della tensione ai capi di un bipolo	36
1.3.5 – Calcolo della tensione tra due punti di connessione	36

Capitolo 2	37
CIRCUITI A REGIME SINUSOIDALE	37
2.1 Sezione A – Esercizi svolti.....	37
2.1.1 – Metodo del tableau.....	37
2.1.2 – Sfasamento tra fasori.....	38
2.1.3 – Bipolo risonante	39
2.1.4 – Teorema di Thévenin	42
2.1.5 – Teorema di Norton	43
2.1.6 – Teorema di Thévenin	46
2.1.7 – Metodo del tableau, impedenza vista da un generatore	48
2.1.8 – Metodo del tableau, energia elettromagnetica media.....	50
2.2 Sezione B – Esercizi con traccia della soluzione	52
2.2.1 – Metodo delle correnti di maglia.....	52
2.2.2 – Equivalente di Norton	53
2.2.3 – Metodo delle tensioni di nodo.....	54
2.2.4 – Metodo delle tensioni di nodo.....	56
2.2.5 – Metodo delle correnti di maglia.....	58
2.2.6 – Principio di sovrapposizione degli effetti	59
2.3 Sezione C – Esercizi da svolgere.....	61
2.3.1 – Calcolo potenza attiva e reattiva erogata da un generatore.....	61
2.3.2 – Calcolo dell'energia elettromagnetica media.....	61
2.3.3 – Calcolo della potenza attiva	62

Capitolo 3	63
CIRCUITI A REGIME PERIODICO NON SINUSOIDALE	63
3.1 Sezione A – Esercizi svolti.....	63
3.1.1 – Sovrapposizione degli effetti	63
3.1.2 – Potenza attiva erogata da un generatore, effetto filtrante.....	67
3.1.3 – Energia elettromagnetica media in induttori mutuamente accoppiati	71
3.1.4 – Metodo del tableau.....	75
3.1.5 – Sovrapposizione degli effetti	77
3.1.6 – Sovrapposizione degli effetti	79
3.2 Sezione B – Esercizi con traccia della soluzione	83
3.2.1 – Metodo delle correnti di maglia.....	83
3.2.2 – Metodo delle tensioni di nodo.....	85
3.2.3 – Circuito equivalente a T per induttori accoppiati.....	87
3.3 Sezione C – Esercizi da svolgere.....	89
3.3.1 – Induttori accoppiati, energia elettromagnetica media	89

Capitolo 4	91
CIRCUITI APERIODICI.....	91
4.1 Sezione A – Esercizi svolti.....	91
4.1.1 – Metodo del "tableau".....	91
4.1.2 – Induttori accoppiati, metodo delle correnti di maglia, verifica del risultato.....	94
4.1.3 – Induttori accoppiati: circuito equivalente a T	97
4.1.4 – Teorema di Thévenin	100
4.1.5 – Chiusura interruttore	103
4.1.6 – Apertura interruttore, induttori accoppiati	105
4.1.7 (*) – Approfondimento. Analisi energetica Es. 4.1.6	111
4.1.8 – Maglia impropria.....	113
4.1.9 (*) – Approfondimento. Analisi energetica relativa Es. 4.1.8 ..	116
4.2 Sezione B – Esercizi con traccia della soluzione.....	119
4.2.1 – Metodo delle correnti di maglia.....	119
4.2.2 – Metodo delle tensioni di nodo.....	120
4.2.3 – Apertura tasto, metodo delle tensioni di nodo, poli complessi coniugati.....	121
4.2.4 – Trasformata di Laplace con poli complessi coniugati	124
4.2.5 – Chiusura tasto, metodo delle tensioni di nodo	126
4.3 Sezione C – Esercizi da svolgere.....	128
4.3.1 – Chiusura tasto.....	128
4.3.2 – Generatore di corrente a gradino.....	129
4.3.3 – Chiusura tasto.....	129
4.3.4 – Generatore di tensione a gradino	130

Capitolo 5	131
RAPPRESENTAZIONE INGRESSO USCITA DI UN CIRCUITO	131
5.1 Sezione A – Esercizi svolti.....	131
5.1.1 – Funzione di trasferimento con 1 polo, diagramma di Bode (componente, asintotico, esatto).....	131
5.1.2 – Funzione di trasferimento con 1 polo e 1 zero nell'origine; diagrammi di Bode.....	136
5.1.3 – Funzione di trasferimento con 2 poli e 1 zero nell'origine; diagrammi di Bode.....	138
5.1.4 – Funzione di trasferimento con poli e zeri complessi coniugati, diagrammi di Bode.....	141
5.2 Sezione B – Esercizi con traccia della soluzione	145
5.2.1 – Diagrammi di Bode.....	145
5.2.2 – Diagrammi di Bode.....	147
5.2.3 – Diagrammi di Bode.....	149

5.2.4 – Diagrammi di Bode.....	151
5.3 Sezione C – Esercizi da svolgere.....	152
5.3.1 – Diagramma di Bode.....	152
5.3.2 – Diagramma di Bode.....	152

Capitolo 6

CIRCUITI A DUE PORTE..... 153

6.1 Sezione A – Esercizi svolti.....	153
6.1.1 – Circuito resistivo, parametri Y, prove per la determinazione dei parametri equivalenti.....	153
6.1.2 – Determinazione matrice $h(s)$	155
6.1.3 – Circuito resistivo, matrice Z.....	158
6.1.4 – Matrice a parametri T.....	161
6.1.5 – Matrici Y, h (collegamento parallelo ibrido serie-parallelo).....	163
6.1.6 – Matrice Z, condizione di serie tra due circuiti due porte.....	165
6.1.7 – Rappresentazione a parametri T di reti 2 porte elementari.....	166
6.1.8 – Impedenza rete due porte vista dai morsetti di ingresso.....	168
6.2 Sezione B – Esercizi con traccia della soluzione.....	170
6.2.1 – Cascata di doppi bipoli; conversione $h \rightarrow T$	170
6.2.2 – Parallelo di doppi bipoli; conversione $Z \rightarrow Y$	171
6.2.3 – Impedenza di ingresso e di carico di reti due porte.....	172
6.2.4 – Matrice a parametri h.....	173
6.3 Sezione C – Esercizi da svolgere.....	175
6.3.1 – Matrice a parametri h.....	175
6.3.2 – Collegamento tra circuiti due porte.....	176

SOLUZIONE ESERCIZI SEZIONE C..... 177

Cap. 1 – Circuiti resistivi.....	177
Cap. 2 – Circuiti a regime sinusoidale.....	177
Cap. 3 – Circuiti a regime periodico non sinusoidale.....	177
Cap. 4 – Circuiti aperiodici.....	177
Cap. 5 – Rappresentazione ingresso uscita di un circuito.....	178
Cap. 6 – Circuiti a due porte.....	180

CIRCUITI E Prefazione

Gli esercizi raccolti in questo volume riguardano l'analisi di circuiti elettrici lineari. In particolare molti esercizi sono stati tratti da testi d'esame relativi all'insegnamento di Elettrotecnica nei corsi di Laurea in Ingegneria dell'Università di Pisa.

Il testo di riferimento è *Lezioni di Elettrotecnica* del Prof. Marco Raugi, pubblicato da Pisa University Press (2012). Di tale testo è stata adottata l'impostazione. Si presentano infatti in successione esercizi sui circuiti resistivi, a regime sinusoidale, a regime periodico non sinusoidale e aperiodici (Cap. 1 + 4), quindi esercizi relativi alla rappresentazione ingresso - uscita di un circuito (Cap. 5) ed infine esercizi sui circuiti due porte (Cap. 6).

Ogni capitolo è suddiviso in tre sezioni. In particolare nella sezione A gli esercizi sono svolti in modo esteso mettendo in evidenza laddove necessario o semplicemente utile gli aspetti teorici connessi. In tale sezione compaiono anche argomenti ed esercizi di approfondimento, riconoscibili per la presenza di un asterisco (*), che possono essere omessi in una prima lettura del testo. Nella sezione B è invece fornita solo la traccia della soluzione dell'esercizio proposto mentre nella sezione C la soluzione è lasciata allo studente.

Desidero ringraziare il Prof. Marco Raugi per avermi seguito nel raccogliere in un volume il materiale utilizzato per le esercitazioni e tutti coloro che vorranno far pervenire osservazioni, critiche e suggerimenti.

Settembre 2013

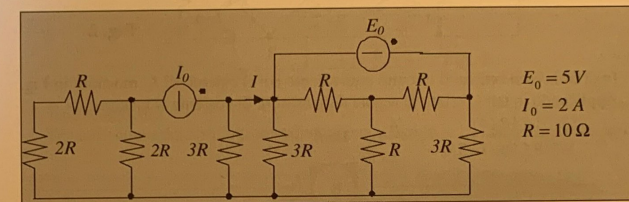
Francesco Bertoncini

CIRCUITI RESISTIVI

1.1 SEZIONE A – ESERCIZI SVOLTI E COMMENTATI

1.1.1 – Principio di sovrapposizione degli effetti, circuiti equivalenti

Determinare la corrente I nel circuito mostrato in figura applicando il principio di sovrapposizione degli effetti.



Il circuito assegnato è lineare e si è interessati a determinare la sola corrente di ramo I . Applicando il principio di sovrapposizione degli effetti, si ha che $I = I_{I_0} + I_{E_0}$, essendo I_{I_0} , I_{E_0} il contributo alla corrente I rispettivamente dato dal generatore di corrente I_0 e dal generatore di tensione E_0 .

Valutazione di I_{I_0}

Nel circuito agisce solo il generatore I_0 essendo il generatore E_0 disattivato ovvero sostituito da un corto circuito.

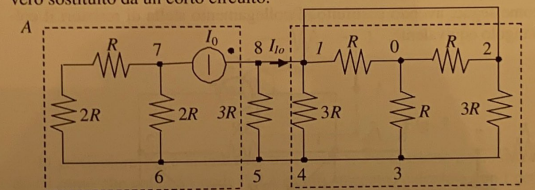


Fig. 1

Il circuito può essere semplificato nelle parti racchiuse dai rettangoli A, B trattaggiati tenendo conto che il generatore ideale di corrente impone la propria corrente al nodo 8 indipendentemente dal valore della resistenza equivalente vista tra i nodi 7, 6 che risulta in serie a I_0 . Applicando il principio di sostituzione, la parte di circuito racchiusa nel rettangolo tratteggiato A è equivalente, ai fini del calcolo del-

la corrente I_0 , ad un generatore ideale di corrente di valore I_0 , posto tra i nodi 8, 5 così come più avanti indicato; sostituendo alla stella di resistenze facenti capo ai nodi 1, 2, 3 (cfr. rettangolo B) il triangolo di resistenze $R_7 = R_{12} = R_{23} = R_{31} = 3R$.

Il circuito così ottenuto (cfr. Fig. 2) può ulteriormente essere semplificato tenendo conto dei collegamenti parallelo tra le coppie di nodi (1,4) e (1,3), e tra le coppie (1,2), (2,3).

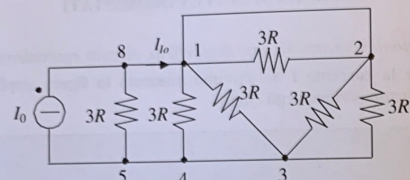


Fig. 2

In definitiva si ottiene il circuito equivalente per il calcolo di I_0 mostrato in Fig.

3. Applicando in tale circuito la regola del partitore di corrente si ha che

$$I_0 = \frac{1/(3R/4)}{1/(3R/4) + 1/(3R)} I_0 = \frac{4}{5} I_0 = 1,6 \text{ A}$$

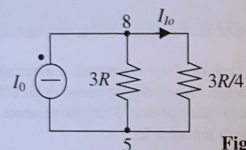


Fig. 3

Valutazione di I_{E_0}

Nel circuito assegnato agisce solo il generatore E_0 essendo il generatore di corrente disattivato e quindi equivalente ad un circuito aperto. Il circuito può essere ridisegnato come segue, avendo sostituito al collegamento stella di resistori il collegamento triangolo equivalente.

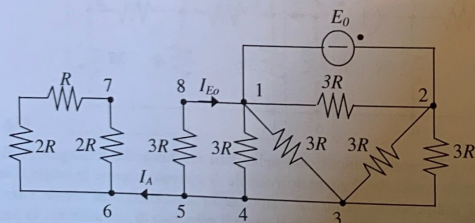


Fig. 4

Applicando la legge di Ohm al resistore di valore $3R$ posto tra i nodi 5, 8 si ha che $I_{E_0} = V_{58}/(3R) = V_{31}/(3R)$; tenendo conto che $I_A = 0$ e sostituendo le rispettive resistenze equivalenti ai collegamenti parallelo tra i resistori posti tra i nodi $3 \equiv 4 \equiv 5$, $1 \equiv 8$ e i nodi 2, 3 si ottiene il circuito equivalente per il calcolo di V_{31} mostrato in Fig. 5 dove $R_{31} = R$, $R_{23} = (3/2)R$. Applicando la regola del partitore di tensione si ha che

$$V_{31} = \frac{R_{31}}{R_{23} + R_{31}} E_0 = \frac{2}{5} E_0 = 2V \text{ da cui segue che } I_{E_0} = \frac{V_{31}}{3R} \cong 0,067 \text{ A.}$$

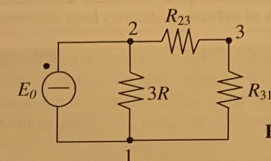


Fig. 5

Valutazione di I

Tenendo conto dei risultati precedentemente ottenuti si ha che $I = I_0 + I_{E_0} \cong 1,667 \text{ A}$



1.1.2 - Teorema di Thévenin

Risolvere l'Esercizio 1.1 applicando il teorema di Thévenin.

L'applicazione del teorema di Thévenin permette di determinare la corrente I considerando il circuito equivalente mostrato in Fig. 1, dove la tensione V_{Th} e la resistenza R_{Th} devono essere ricavate a partire dal circuito assegnato staccando il ramo in cui scorre la corrente incognita I ovvero considerando il circuito di Fig. 2.

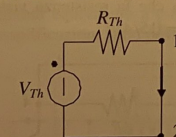


Fig. 1

In particolare V_{Th} è la tensione tra i nodi 1, 2 o tensione a vuoto cioè senza carico (il ramo che collega i nodi 1, 2 è infatti staccato) calcolata con i generatori I_0 , E_0 attivi, mentre R_{Th} è la resistenza vista dai nodi suddetti quando tutti i generatori indipendenti sono disattivati ($I_0 = 0$, $E_0 = 0$).

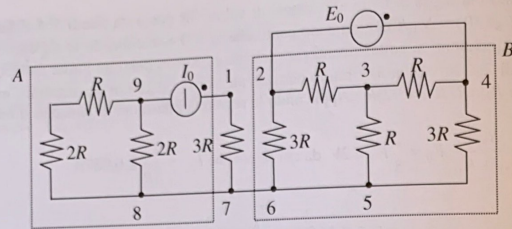


Fig. 2

Il circuito per il calcolo di V_{th} , R_{th} può essere semplificato nelle parti racchiuse dai rettangoli tratteggiati A, B tenendo conto che I_0 è un generatore ideale di corrente e che tra i nodi 2, 3, 4, 5 si ha un collegamento a stella di resistori che può essere trasformato in un collegamento a triangolo. Il circuito equivalente ottenuto risulta essere

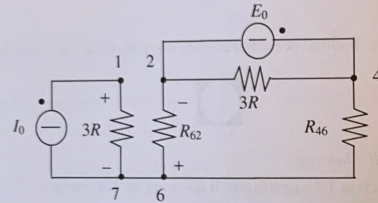


Fig. 3

dove $R_{46} = R_{62} = (3R) \parallel (3R) = (3/2)R$.

Si ha che $V_{th} = V_{12} = V_{17} + V_{76} + V_{62} = 3RI_0 + E_0/2$, avendo applicato la regola del partitore di tensione alle resistenze in serie R_{46} , R_{62} per calcolare V_{62} .

Nel valutare la resistenza R_{th} i generatori sono disattivati ed il circuito da considerare è mostrato in Fig. 4. Si ha che la resistenza vista tra i nodi 1, 2 risulta $R_{th} = 3R + R_{62} \parallel R_{46} = 3R + (3/4)R = (15/4)R$.

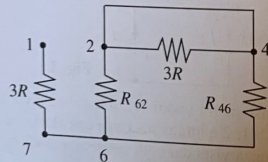


Fig. 4

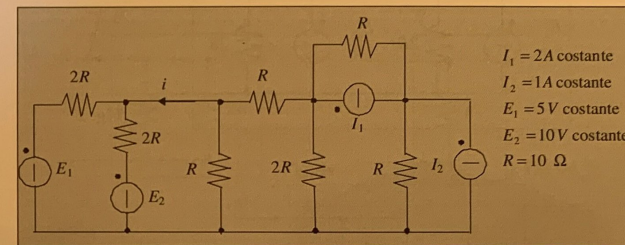
In definitiva, considerando il circuito equivalente di Thévenin (cfr. Fig. 1), la corrente I è data da

$$I = \frac{V_{th}}{R_{th}} = \frac{3RI_0 + (E_0/2)}{(15/4)R} = \frac{4}{5}I_0 + \frac{2}{15R}E_0 \approx 1,667A.$$



1.1.3 – Principio di sovrapposizione degli effetti, partitore di corrente

Determinare la corrente i nel circuito mostrato in figura.



Applicando il principio di sovrapposizione degli effetti, la corrente i può essere calcolata come somma del contributo i_E dovuto ai generatori di tensione e del contributo i_I dovuto ai generatori di corrente:

$$i = i_E + i_I.$$

Calcolo di i_E

Nel calcolo del contributo dovuto ai generatori di tensione i generatori di corrente sono disattivati e quindi equivalenti a circuiti aperti. Ridisegnato il circuito come in Fig. 1, alcune semplificazioni sono possibili.

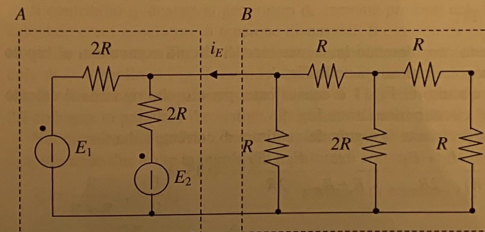


Fig. 1

Con riferimento alla parte di circuito racchiusa dal rettangolo tratteggiato A, sostituendo a ciascun generatore di tensione avente in serie il resistore $2R$ l'equivalente di Norton si ottiene il circuito mostrato in Fig. 2; tale circuito può essere ulteriormente semplificato tenendo conto del collegamento parallelo tra i due generatori di corrente (equivalente ad un solo generatore di corrente) e del collegamento parallelo tra i due resistori (equivalente ad un solo resistore) ottenendo il circuito equivalente di Fig. 3.

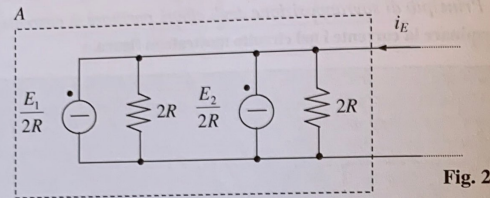


Fig. 2

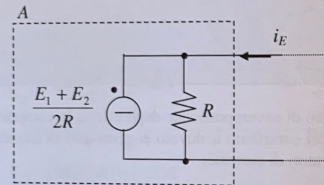


Fig. 3

Considerando nuovamente il circuito di Fig. 1, nella parte racchiusa dal rettangolo tratteggiato B si hanno collegamenti serie parallelo tra resistori equivalenti ad un unico resistore di valore

$$R_B = \frac{2}{3}R = \frac{20}{3} \Omega;$$

tale valore è ottenuto considerando la successione di circuiti equivalenti al bipolo contenuto nel rettangolo B mostrata nelle Fig. 4.

In definitiva il circuito di Fig. 1 è equivalente, per ciò che riguarda il calcolo della corrente i_E , al circuito mostrato in Fig. 5.

Applicando in tale circuito la regola del partitore di corrente si ha

$$i_E = -\frac{1/R_B}{(1/R_B) + (1/R)} \frac{E_1 + E_2}{2R} = -\frac{R}{R + R_B} \frac{E_1 + E_2}{2R} = -0,45 A$$

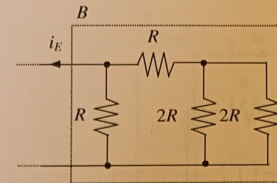


Fig. 4a

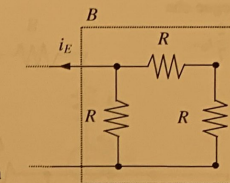


Fig. 4b

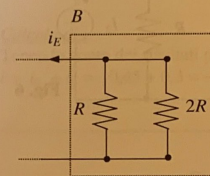


Fig. 4c

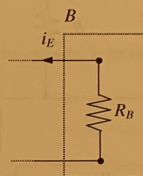


Fig. 4d

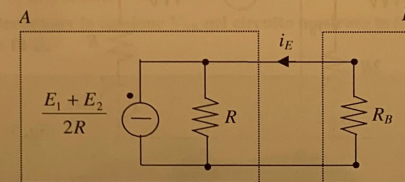


Fig. 5

Calcolo di i_I

Il contributo i_I dovuto ai generatori di corrente presenti nel circuito assegnato è calcolato con i generatori di tensione disattivati. Il circuito da considerare è pertanto quello mostrato in Fig. 6; tale circuito è equivalente, per ciò che riguarda il calcolo di i_I , a quello di Fig. 7, avendo sostituito ai generatori di corrente con in parallelo il resistore il collegamento equivalente di Thévenin e ai due resistori di valore $2R$ collegati in parallelo il resistore equivalente di valore R .

Nel circuito di Fig. 7 la corrente da calcolare può essere espressa in funzione di i_0 applicando due volte la regola del partitore di corrente; si ha infatti che

$$i_I = \frac{R}{R + R} i_A = \frac{1}{2} i_A \quad \text{partitore di corrente } i_A, i, i_C;$$

$$i_A = \frac{2R}{2R + [R + (R/2)]} i_0 = \frac{4}{7} i_0 \quad \text{partitore di corrente } i_0, i_A, i_B$$

da cui segue che

$$i_I = \frac{2}{7} i_0.$$

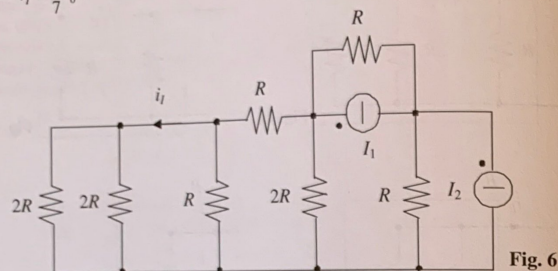


Fig. 6

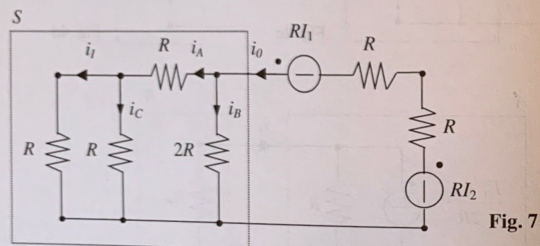


Fig. 7

In questo modo, avendo cioè espresso la corrente i_I in funzione della corrente i_0 , è possibile calcolare quest'ultima nel circuito equivalente di Fig. 8 ottenuto dal circuito di Fig. 7 sostituendo al bipolo racchiuso dal rettangolo tratteggiato S la sua resistenza equivalente

$$R_s = \frac{2R \cdot [R + (R/2)]}{2R + [R + (R/2)]} = \frac{6}{7} R.$$

Per il II principio di Kirchhoff applicato alla maglia in cui scorre la corrente i_0 si ha che

$$i_0 = \frac{RI_1 + RI_2}{R + R + R_s} = \frac{21}{20} A;$$

ne segue che

$$i_I = \frac{2}{7} i_0 = 0,3 A.$$

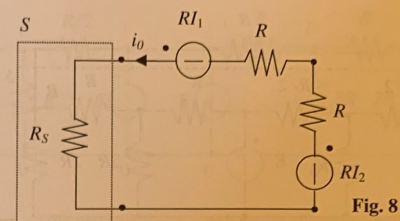


Fig. 8

Calcolo di i

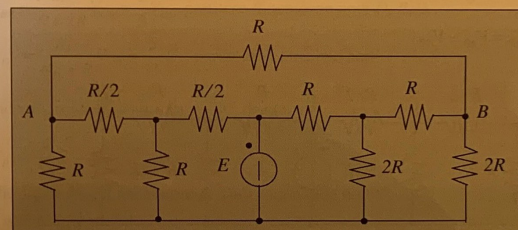
Tenendo conto dei risultati precedentemente ottenuti, si ha che

$$i = i_E + i_I = -0,45 + 0,3 = -0,15 A.$$



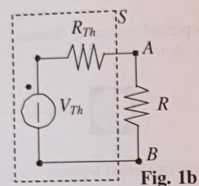
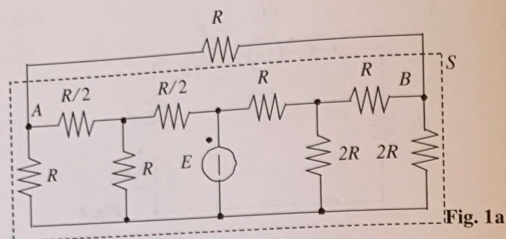
1.1.4 - Teorema di Thévenin, modifica topologica generatore di tensione, partitore di tensione

Determinare la tensione V_{AB} nel circuito mostrato in figura dove $E = 5 V$, $R = 10 \Omega$.



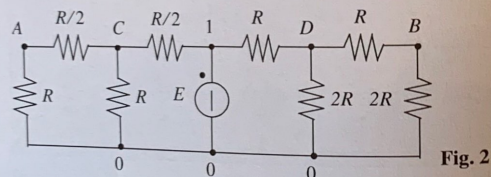
Applicando il teorema di Thévenin alla parte di circuito racchiusa dal rettangolo tratteggiato S mostrato in Fig. 1a, il calcolo della tensione V_{AB} può essere effettuato nel circuito equivalente di Fig. 1b da cui risulta, applicando la regola del partitore di tensione,

$$V_{AB} = \frac{R}{R_{Th} + R} V_{Th}.$$

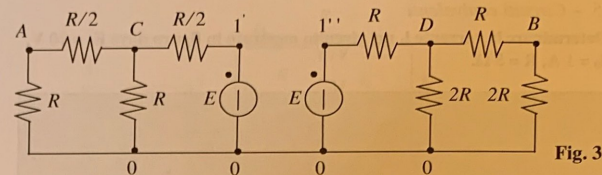


Il calcolo della tensione di Thévenin V_{Th} deve essere effettuato staccando il resistore R posto tra i nodi A, B nel circuito assegnato ovvero considerando il circuito mostrato in Fig. 2 dove sono stati indicati con il numero 0 i 3 nodi equipotenziali; si ha che

$$V_{Th} = V_{AB} = V_{A0} - V_{B0}.$$



Applicando la modifica topologica al generatore di tensione posto tra i nodi 1, 0 si ottiene il seguente circuito equivalente



dove il calcolo delle tensioni V_{A0}, V_{B0} può essere effettuato applicando due volte, nel modo di seguito indicato, la regola del partitore di tensione.

Con riferimento alla Fig. 3 si ha che

$$V_{A0} = \frac{R}{R + (R/2)} V_{C0} = \frac{2}{3} V_{C0} \text{ partitore di tensione nodi } C, A, 0,$$

$$V_{C0} = \frac{R_C}{R_C + (R/2)} V_{1'0} = \frac{6}{11} E \text{ partitore di tensione nodi } 1', C, 0,$$

essendo $R_C = [(R/2) + R] \parallel R = \frac{3}{5} R$, da cui

$$V_{A0} = \frac{4}{11} E.$$

In modo analogo può essere calcolata la tensione V_{B0} ; si ha:

$$V_{B0} = \frac{2R}{R + 2R} V_{D0} = \frac{2}{3} V_{D0} \text{ partitore di tensione nodi } D, B, 0,$$

$$V_{D0} = \frac{R_D}{R_D + R} V_{1''0} = \frac{6}{11} E \text{ partitore di tensione nodi } 1'', D, 0,$$

essendo $R_D = (R + 2R) \parallel (2R) = \frac{6}{5} R$, da cui

$$V_{B0} = \frac{4}{11} E.$$

Poiché $V_{A0} = V_{B0}$, il generatore di Thévenin risulta nullo:

$$V_{Th} = V_{A0} - V_{B0} = 0.$$

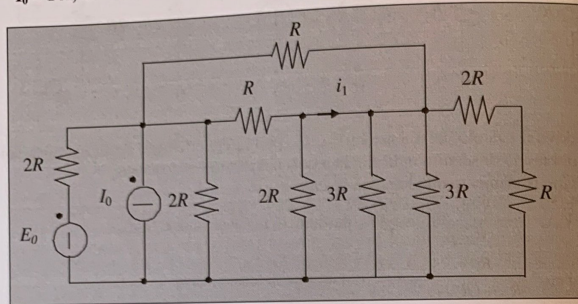
Il circuito equivalente per il calcolo di V_{AB} (cfr. Fig. 1b) non è quindi alimentato; indipendentemente dal valore R_{Th} si ha

$$V_{AB} = 0.$$

Da osservare come il risultato ottenuto valga per qualsiasi valore di R e di E .

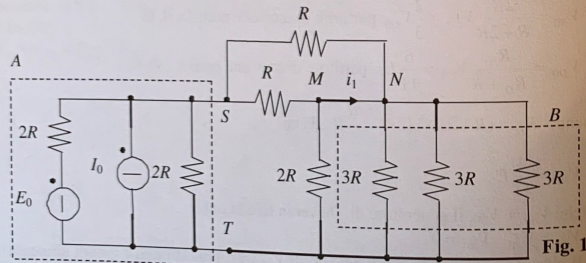
1.1.5 - Circuiti equivalenti

Determinare la corrente i_1 nel circuito mostrato in figura dove $E_0 = 10 \text{ V}$, $I_0 = 1 \text{ A}$, $R = 5 \Omega$.



Poiché si è interessati a determinare la sola corrente i_1 è utile ricavare dal circuito considerato opportuni circuiti equivalenti nei quali il calcolo di i_1 risulti semplificato.

Una prima semplificazione si ottiene ridisegnando il circuito assegnato come mostrato in Fig. 1.



Applicando in tale circuito il teorema di Thévenin nella parte racchiusa nel rettangolo tratteggiato A e tenendo conto del collegamento in parallelo tra i resistori racchiusi nel rettangolo tratteggiato B, si ottiene il circuito equivalente di Fig. 2

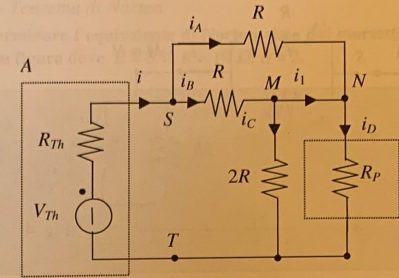


Fig. 2

dove

$$R_p = \frac{1}{1/(3R) + 1/(3R) + 1/(3R)} = R$$

mentre V_{Th} , R_{Th} devono essere calcolati considerando il circuito

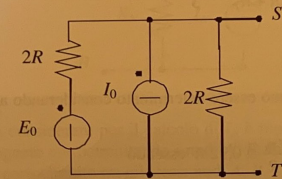


Fig. 3

ottenendo

$$V_{Th} = V_{ST} = V_{ST}' + V_{ST}'' = \frac{E_0}{2} + RI_0 = 10 \text{ V}, \quad R_{Th} = \frac{1}{1/(2R) + 1/(2R)} = R = 5 \Omega.$$

Da notare che la tensione di Thévenin V_{Th} è calcolata applicando il principio di sovrapposizione degli effetti nel circuito di Fig. 3, facendo cioè agire separatamente il generatore di tensione e quello di corrente.

Considerato nuovamente il circuito equivalente per il calcolo di i_1 di Fig. 2 si ha che, per il I principio di Kirchhoff applicato al nodo N, $i_1 = i_D - i_A$ ossia la corrente da determinare è funzione delle correnti i_D , i_A . Basta quindi ricavare prima le correnti i_D , i_A e, successivamente, ottenere i_1 . In particolare, può essere utilizzato il circuito seguente

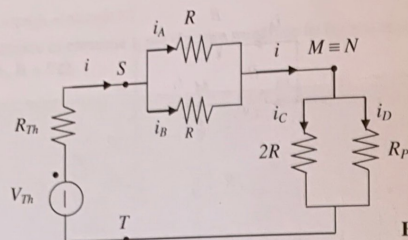


Fig. 4

In tale circuito non compare la corrente i_1 (i nodi M, N coincidono) ma il circuito risulta equivalente a quello di Fig. 2 rispetto al calcolo delle correnti i_D, i_A ; in più, tale calcolo risulta semplificato. Applicando infatti la regola del partitore di corrente si può esprimere sia i_D che i_A in funzione di i :

$$i_A = \frac{R}{R+R} i = \frac{1}{2} i, \quad i_D = \frac{2R}{2R+R_p} i = \frac{2}{3} i,$$

da cui segue che

$$i_1 = i_D - i_A = \frac{2}{3} i - \frac{1}{2} i = \frac{1}{6} i.$$

Il valore della corrente i può essere determinato considerando ancora il circuito di Fig. 4; si ha che

$$i = \frac{V_{th}}{R_{th} + R_{p1} + R_{p2}} = \frac{6 V_{th}}{13 R} \approx 0,92 A \text{ essendo}$$

$$R_{p1} = \frac{R}{2}, \quad R_{p2} = \frac{2R \cdot R_p}{2R + R_p} = \frac{2}{3} R.$$

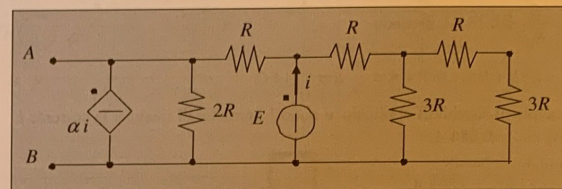
Segue pertanto che

$$i_1 = \frac{1}{6} i \approx 0,15 A.$$



1.1.6 - Teorema di Norton

Determinare l'equivalente di Norton visto dai morsetti A, B della rete mostrata in figura dove $E = 5 V, R = 10 \Omega, \alpha = 2$.



L'equivalente di Norton della rete assegnata è mostrato in Fig. 1; occorre pertanto calcolare il generatore di corrente I_N e la resistenza R_N .

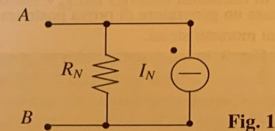


Fig. 1

Calcolo di I_N

Il circuito da considerare per il calcolo di I_N è mostrato in Fig. 2 ed è ottenuto dal circuito assegnato cortocircuitando i nodi A, B; in particolare occorre calcolare la corrente I_N di cortocircuito tra gli stessi nodi A, B.

Applicando il I principio di Kirchhoff al nodo $C \equiv A$ si che $I_N = \alpha i + i_X$; occorre dunque ricavare le correnti i, i_X .

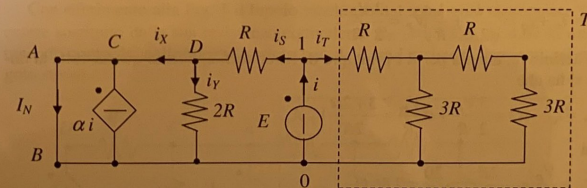


Fig. 2

Poiché la tensione ai capi del resistore di valore $2R$ è nulla, $i_Y = 0$. Ne segue che

$$i_X = i_S = \frac{E}{R} = 0,5 A$$

Indicando con R_T la resistenza equivalente del bipolo racchiuso nel rettangolo tratteggiato T si ha che, ancora per il II principio di Kirchhoff,

$$i_T = \frac{E}{R_T} \cong 0,184 \text{ A essendo}$$

$$R_T = [(3R + R) \parallel (3R)] + R = \frac{19}{7}R \cong 27,14 \Omega.$$

Il I principio di Kirchhoff applicato al nodo 1 permette di ricavare la corrente i :

$$i = i_s + i_T = 0,684 \text{ A}.$$

In definitiva, si ha che

$$I_N = \alpha i + i_x = 1,868 \text{ A}$$

Calcolo di R_N

Per il calcolo della resistenza di Norton occorre disattivare il generatore E nella rete assegnata ed utilizzare un generatore di prova posto tra i nodi A, B per valutare la resistenza R_N vista dai morsetti stessi.

Con riferimento alla Fig. 3, in cui è stato scelto un generatore di tensione come generatore di prova, si ha che $i_T = 0$ essendo nulla la differenza di potenziale ai capi del bipolo T (per quanto precedentemente visto, tale bipolo è infatti equivalente ad una resistenza R_T : per la legge di Ohm si ha che $i_T = V_{10}/R_T$).

Ne segue che

$$i = -i_D = -\frac{V_{D1}}{R} = -\frac{V_P}{R}$$

Poiché

$$i_Y = \frac{V_{D0}}{2R} = \frac{V_P}{2R}$$

si ha che, per il I principio di Kirchhoff applicato al D ,

$$i_C = i_Y + i_D = \left(\frac{1}{2R} + \frac{1}{R} \right) V_P = \frac{3}{2} \frac{V_P}{R}.$$

In definitiva, ancora per il I principio di Kirchhoff, applicato questa volta al nodo C, si ha che

$$I_P = i_C - \alpha i = \frac{3}{2} \frac{V_P}{R} + \alpha \frac{V_P}{R} = \frac{3+2\alpha}{2R} V_P$$

da cui

$$R_N = \frac{V_P}{I_P} = \frac{2R}{3+2\alpha} = \frac{20}{7} \cong 2,86 \Omega.$$

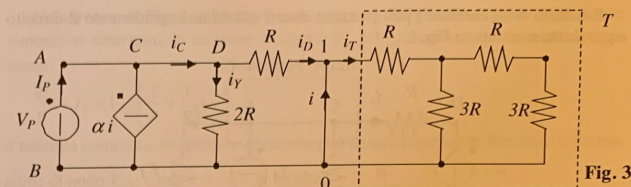
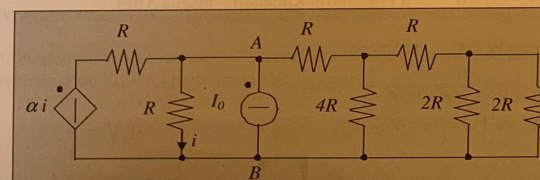


Fig. 3

1.1.7 – Resistenza equivalente di un bipolo, macro nodo

Determinare la tensione V_{AB} nel circuito mostrato in figura dove $I_0 = 10\text{ A}$, $\alpha = 4\text{ V/A}$, $R = 2\ \Omega$.



La tensione tra i nodi A, B può essere calcolata come $V_{AB} = R i$ semplificando il circuito assegnato.

Con riferimento alla Fig. 1 il bipolo racchiuso dal rettangolo tratteggiato T può essere sostituito dalla sua resistenza equivalente $R_T = (7/3)R \cong 4,67 \, \Omega$ ottenuta tenendo conto dei collegamenti serie e parallelo tra i resistori contenuti nel rettangolo stesso.

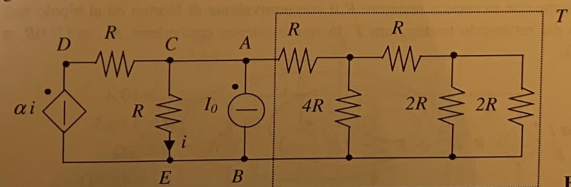


Fig. 1

Il calcolo della corrente i può pertanto essere effettuato considerando il circuito equivalente mostrato in Fig. 2.

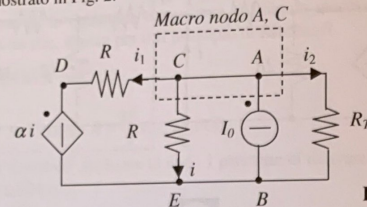


Fig. 2

Applicando in tale circuito il metodo del "tableau", il valore di i si ottiene risolvendo il sistema

$$\begin{cases} I_0 - i_1 - i_2 - i = 0 & \text{I Principio di Kirchhoff} & \text{macro nodo A, C} \\ R i_1 + \alpha i - R i = 0 & \text{II Principio di Kirchhoff} & \text{maglia CDE} \\ R_T i_2 - R i = 0 & \text{II Principio di Kirchhoff} & \text{maglia ABEC} \end{cases}$$

nelle incognite i, i_1, i_2 . Si ottiene

$$i = \frac{I_0}{1 + (R - \alpha)/R + R/R_T} = 23,35 \text{ A}.$$

Ne segue che $V_{AB} = R i = 46,7 \text{ V}$.

1.1.8 - Metodo delle tensioni di nodo

Si risolve l'esercizio 1.7 applicando il metodo delle tensioni di nodo.

Si considera il circuito equivalente per il calcolo della tensione V_{AB} mostrato in Fig. 1 ottenuto dal circuito nell'Esercizio 1.7 sostituendo al generatore dipendente di tensione con in serie il resistore R il suo equivalente di Norton ed al bipolo racchiuso dal rettangolo tratteggiato T la sua resistenza equivalente $R_T = (7/3)R \cong 4,67 \Omega$.

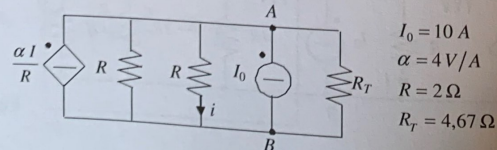


Fig. 1

Nel circuito di Fig. 1 si hanno 2 nodi e 5 rami. Scegliendo B come nodo di riferimento si determina la tensione di nodo $V_A \equiv V_{AB}$ scrivendone la relativa equazione

$$\frac{\alpha}{R} i + I_0 = V_{AB} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R_T} \right)$$

e tenendo conto che la corrente di ramo i può essere espressa in funzione della tensione di nodo V_{AB} come $i = \frac{V_{AB}}{R}$ si ha che

$$V_{AB} = \frac{I_0}{\frac{2}{R} + \frac{1}{R_T} - \frac{\alpha}{R}} \cong 46,7 \text{ V}.$$

1.1.9 - Metodo delle correnti di maglia

Si risolve l'Esercizio 1.7 applicando il metodo delle correnti di maglia.

Con riferimento all'Esercizio 1.7 si considera il circuito equivalente per il calcolo della tensione $V_{AB} = R i$ mostrato in Fig. 1.

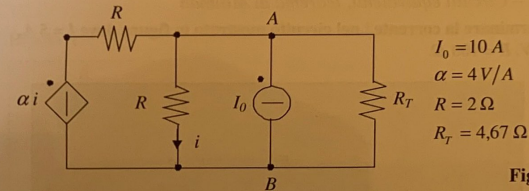


Fig. 1

Il circuito ha due nodi e quattro rami. Scegliendo come albero il ramo con il resistore R_T risultano definite le correnti di maglia monocorda i_1, i, I_0 mostrate in Fig. 2.

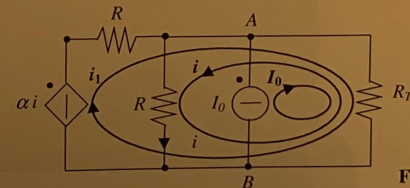


Fig. 2

Poiché I_0 è nota, è sufficiente scrivere le equazioni di maglia per le correnti i_1, i :

$$\begin{cases} \alpha i = (R + R_T) i_1 + R_T I_0 - R_T i & \text{equazione per la corrente di maglia } i_1 \\ 0 = (R + R_T) i - R_T I_0 - R_T i_1 & \text{equazione per la corrente di maglia } i \end{cases}$$

Sostituendo i valori noti, il sistema può essere riscritto come

$$\begin{cases} 8,67 i - 6,67 i_1 = 46,7 \\ 6,67 i - 4,67 i_1 = 46,7 \end{cases}$$

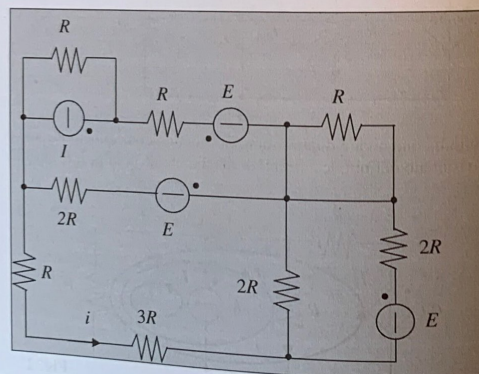
e risolto rispetto ad i utilizzando la regola di Cramer. Si ottiene

$$i = \frac{\begin{vmatrix} 46,7 & -6,67 \\ 46,7 & -4,67 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8,67 & -6,67 \\ 6,67 & -4,67 \end{vmatrix}} = 23,35 \text{ A}$$

da cui segue che
 $V_{AB} = Ri = 46,7 \text{ V}$.

1.1.10 - Circuiti equivalenti, teorema di Millman

Determinare la corrente i nel circuito mostrato in figura dove $I = 5 \text{ A}$,
 $E = 10 \text{ V}$, $R = 100 \Omega$



Il circuito assegnato può ridisegnato come in Fig. 1 e semplificato sostituendo

- al generatore di corrente con in parallelo il resistore R (cfr. bipolo A) il circuito equivalente di Thévenin;
- al resistore R con in parallelo il corto circuito che si ha tra i nodi 1 e 3, 4 (cfr. rettangolo B) un cortocircuito;
- al bipolo C il generatore ed il resistore equivalenti di Thévenin di valori rispettivamente dati da $V_{Th} = E/2$, $R_{Th} = R$;
- alla serie di resistori di valore R , $3R$ (cfr. bipolo D) il resistore equivalente $R_S = 4R$.

Con queste sostituzioni il circuito assegnato è equivalente, per ciò che riguarda il calcolo della corrente i , al circuito di Fig. 2.

Per il teorema di Millman applicato a tale circuito si ha che

$$V_{15} = \frac{\frac{RI - E}{2R} + \frac{E}{2R} + \frac{V_{Th}}{R_S + R_{Th}}}{\frac{1}{2R} + \frac{1}{2R} + \frac{1}{R_S + R_{Th}}} = \frac{5RI + E}{12} \approx 209,167 \text{ V}$$

Applicando il II principio di Kirchhoff alla maglia costituita dal ramo in cui scorre la corrente i si ha che

$$V_{15} = V_{Th} - (R_S + R_{Th})i$$

Ne segue che

$$i = \frac{V_{Th} - V_{15}}{R_S + R_{Th}} \approx -0,41 \text{ A}$$

Bipolo A

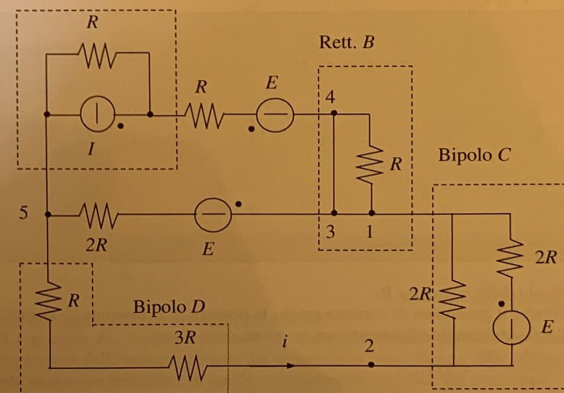


Fig. 1

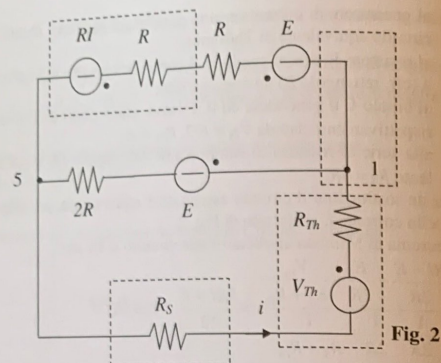
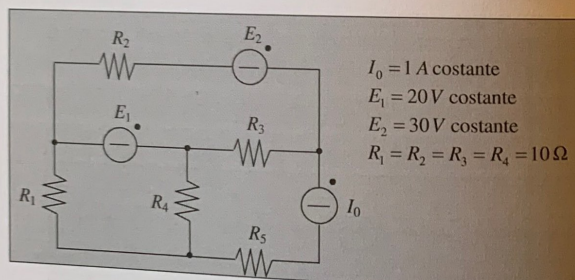


Fig. 2

1.1.11 (*) - Potenza erogata e bilancio energetico

Considerato il circuito mostrato in figura si determini il valore della resistenza R_5 affinché il generatore di corrente I_0 eroghi la potenza $P_0 = 30 \text{ W}$; si calcoli quindi la potenza complessivamente dissipata nel circuito.



$$\begin{aligned} I_0 &= 1 \text{ A costante} \\ E_1 &= 20 \text{ V costante} \\ E_2 &= 30 \text{ V costante} \\ R_1 &= R_2 = R_3 = R_4 = 10 \Omega \end{aligned}$$

Calcolo della resistenza R_5

Affinché il generatore di corrente eroghi la potenza P_0 la tensione V_0 ai suoi capi, valutata utilizzando riferimenti non associati, deve essere

$$V_0 = \frac{P_0}{I_0} = \frac{30}{1} = 30 \text{ V}.$$

Un generatore ideale di corrente quale è I_0 impone tra i nodi del circuito in cui è inserito la propria corrente e, per contro, è il circuito in cui il generatore agisce a determinare la tensione ai suoi capi ovvero ai capi del ramo in cui il generatore stesso è inserito.

Nel caso considerato, con riferimento alla Fig. 1, scelto come albero l'insieme dei rami (A, B), (B, C), (B, D) e definite le correnti di maglia monocorda I_A , I_B , I_0 si ha che la tensione ai capi del ramo in cui è inserito il generatore I_0 può essere calcolata come

$$V_{CD} = E_2 - R_2 I_B - R_1 I_A.$$

D'altro canto, la tensione V_{CD} è somma della tensione ai capi del generatore I_0 e della caduta di tensione su R_5 ; l'equazione che consente di determinare il valore di tale resistore è dunque

$$V_0 - R_5 I_0 = E_2 - R_2 I_B - R_1 I_A.$$

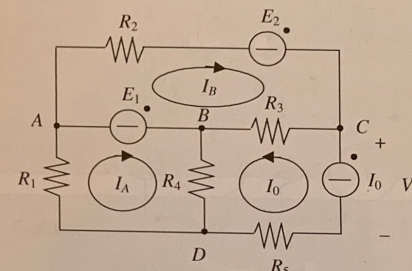


Fig. 1

Risolviendo il sistema

$$\begin{cases} E_1 = (R_1 + R_4) I_A + R_4 I_0 \\ -E_1 + E_2 = (R_2 + R_3) I_B + R_3 I_0 \end{cases}$$

ottenuto applicando il metodo delle correnti di maglia alle maglie in cui scorrono le correnti incognite I_A , I_B si ha che

$$I_A = \frac{E_1 - R_4 I_0}{R_1 + R_4} = 0,5 \text{ A}, \quad I_B = \frac{E_2 - E_1 - R_3 I_0}{R_2 + R_3} = 0.$$

Ne segue che il resistore R_5 deve valere

$$R_5 = \frac{V_0 - E_2 + R_2 I_B + R_1 I_A}{I_0} = 5 \Omega.$$

Calcolo della potenza dissipata nel circuito

La potenza P_D complessivamente dissipata nel circuito può essere valutata o come somma delle potenze erogate dai generatori o come somma delle potenze dissipate su ciascun resistore e di quelle eventualmente assorbite dai generatori.

Per poter effettuare il calcolo occorre innanzitutto valutare le correnti nei differenti rami del circuito e ciò può essere fatto esprimendo ciascuna corrente di ramo in funzione delle correnti di maglia precedentemente calcolate.

Con riferimento alla Fig. 2 si ha che

$$\begin{aligned} I_0 &= 1 \text{ A}, \\ I_1 &= I_A = 0,5 \text{ A}, \\ I_2 &= I_B = 0, \\ I_3 &= I_0 + I_B = 1 \text{ A}, \\ I_4 &= I_A + I_0 = 1,5 \text{ A}, \\ I_5 &= I_0 = 1 \text{ A}, \\ I_6 &= I_A - I_B = 0,5 \text{ A}. \end{aligned}$$

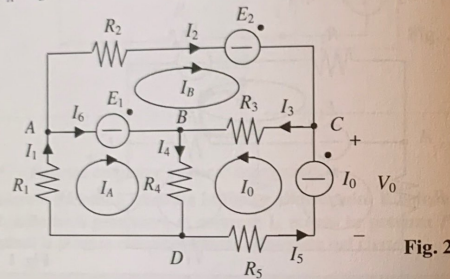


Fig. 2

La potenza erogata dai generatori I_0 , E_1 , E_2 risulta rispettivamente

$$P_0 = V_0 I_0 = 30 \text{ W}, P_1 = E_1 I_6 = 10 \text{ W}, P_2 = E_2 I_2 = 0;$$

in particolare, poiché $P_n \geq 0, n = 0, 1, 2$, nessun generatore assorbe potenza. La potenza P_D dissipata nel circuito è dunque pari alla somma P_R delle potenze dissipate nei resistori.

Per il teorema di Tellegen, che esprime il principio di conservazione dell'energia, la potenza dissipata nel circuito è uguale alla potenza P_G complessivamente fornita dai generatori. Si ha pertanto che:

$$P_D = P_R = P_G = P_0 + P_1 + P_2 = 40 \text{ W}.$$

Verifica

A riprova del risultato ottenuto si calcola la potenza dissipata nei differenti resistori.

Risulta:

$$\begin{aligned} P_{R1} &= R_1 I_1^2 = 2,5 \text{ W}, P_{R2} = R_2 I_2^2 = 0, P_{R3} = R_3 I_3^2 = 10 \text{ W}, P_{R4} = R_4 I_4^2 = 22,5 \text{ W}, \\ P_{R5} &= R_5 I_5^2 = 5 \text{ W} \text{ da cui } P_R = \sum_{n=1}^5 P_{Rn} = 40 \text{ W}. \end{aligned}$$

Ne segue che $P_R = P_G$ così come deve essere.



1.1.12 (*) – Equivalente di Norton e di Thévenin di generatori non ideali di tensione e di corrente, circuiti equivalenti

Si mostri l'equivalenza tra i circuiti mostrati rispettivamente nelle Fig. I, II.

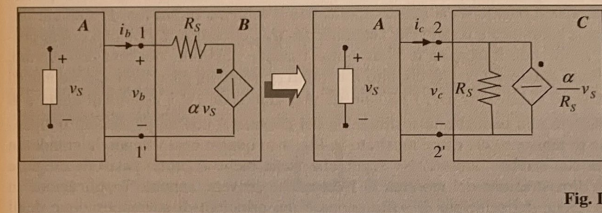


Fig. I

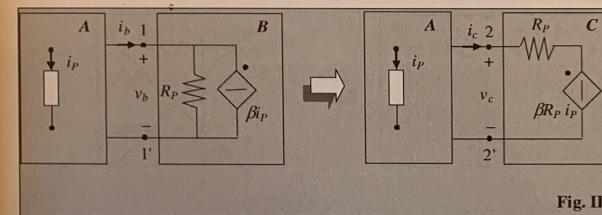


Fig. II

Equivalenza tra i circuiti di Fig. I

I due circuiti mostrati nella Fig. I differiscono nella parte B, dove compare un generatore (dipendente) di tensione con in serie un resistore, e nella parte C, dove si ha un generatore (dipendente) di corrente con in parallelo un resistore.

I circuiti considerati sono pertanto equivalenti se e solo se i (sotto)circuiti B, C sono equivalenti ossia se hanno le stesse equazioni identificative rispettivamente ai morsetti 1, 1' e 2, 2' che li individuano.

Considerato il circuito B si ha, per il II principio di Kirchhoff applicato alla maglia comprendente il ramo $R_S, \alpha v_S$,

$$v_b = R_S i_b + \alpha v_S,$$

ossia risulta definita la funzione $f_b(\cdot)$ tale che $v_b = f_b(i_b)$.
Per il circuito C , applicando il I principio di Kirchhoff al nodo 2,

$$i_c = \frac{v_c}{R_s} - \frac{\alpha}{R_s} v_s,$$

da cui è possibile definire la funzione $f_c(\cdot)$ tale che

$$v_c = R_s i_c + \alpha v_s = f_c(i_c).$$

Poiché $f_b(\cdot) \equiv f_c(\cdot)$ i circuiti B , C hanno le stesse equazioni identificative ai morsetti 1,1' e 2,2' e risultano equivalenti. L'equivalenza tra i circuiti di Fig. 1 è dunque provata.

In particolare, il circuito C è detto *equivalente di Norton* del circuito B perché formalmente ottenibile da questo applicando il teorema di Norton. E' tuttavia importante sottolineare il fatto che l'equivalenza tra i circuiti B , C non può essere provata applicando il teorema di Norton non essendo possibile, nel caso considerato, applicare tale teorema. Nel circuito B è infatti presente un generatore dipendente (il generatore di tensione αv_s) pilotato da una grandezza (v_s) esterna al circuito B stesso; ciò non permette la sostituzione del circuito A con un generatore indipendente di tensione così come mostrato in Fig. 1 in quanto così facendo la grandezza pilota non sarebbe definita. Ne segue che viene meno il primo passo da eseguire nella dimostrazione del teorema di Norton che prevede appunto l'applicazione in successione del principio di sostituzione e del principio di sovrapposizione degli effetti.

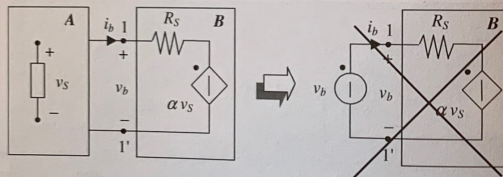


Fig. 1

Equivalenza tra i circuiti di Fig. II

Procedendo in modo analogo a quanto fatto per i circuiti di Fig. I, si mostra l'equivalenza tra il circuito B , dove compare un generatore (dipendente) di corrente con in parallelo un resistore, ed il circuito C dove si ha un generatore (dipendente) di tensione con in serie un resistore.

Applicando il I principio di Kirchhoff al nodo 1 si ha che, per il circuito B di Fig. II,

$$i_p = \frac{v_b}{R_p} - \beta i_p;$$

è quindi definita la funzione $g_b(\cdot)$ tale che

$$i_b = g_b(v_b).$$

Considerato il C di Fig. II, risulta, per il II principio di Kirchhoff applicato alla maglia comprendente il generatore di tensione,

$$v_c = R_p i_c + \beta R_p i_p,$$

da cui risulta definita la funzione $g_c(\cdot)$ tale che

$$i_c = \frac{v_c}{R_p} - \beta i_p = g_c(v_c).$$

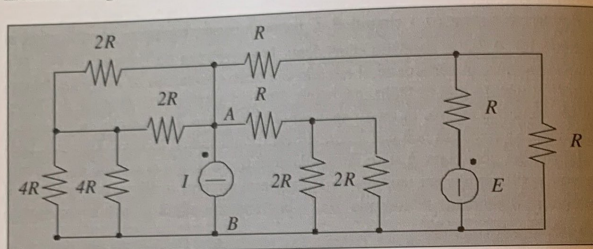
Poiché $g_b(\cdot) \equiv g_c(\cdot)$ i circuiti B , C hanno le stesse equazioni identificative ai morsetti 1,1' e 2,2' e risultano equivalenti. L'equivalenza tra i circuiti di Fig. II è dunque provata; in particolare, il circuito C è detto *equivalente di Thévenin* del circuito B in quanto può formalmente essere ottenuto applicando il teorema di Thévenin al circuito B stesso. In modo analogo al caso di Fig. I, è tuttavia da ribadire il fatto che l'equivalenza non può essere provata applicando il teorema di Thévenin bensì ricorrendo, così come è stato fatto, alla definizione stessa di circuiti equivalenti. La non applicabilità del teorema di Thévenin al circuito B deriva dal fatto che il generatore dipendente di corrente βi_p e la grandezza pilota i_p non appartengono allo stesso sotto circuito.



1.2 SEZIONE B – ESERCIZI CON TRACCIA DELLA SOLUZIONE

1.2.1 – Circuito equivalente, teorema di Norton

Determinare la tensione V_{AB} nel circuito alimentato da generatori costanti mostrato in figura dove $E = 5\text{ V}$, $I = 2\text{ A}$, $R = 10\ \Omega$



Tenendo conto dei collegamenti parallelo e serie tra i differenti resistori si ha che il circuito assegnato è equivalente, per ciò che riguarda il calcolo della tensione V_{AB} , a quello mostrato in Fig. 1.

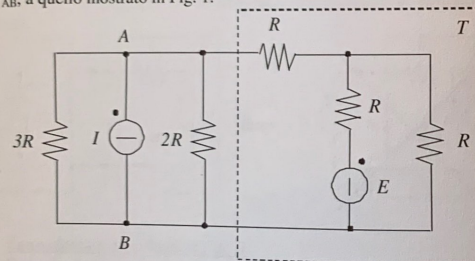


Fig. 1

In particolare, il bipolo T può essere sostituito dall'equivalente di Norton costituito dal parallelo tra il resistore R_N ed il generatore di corrente I_N di valori rispettivamente dati da (cfr. Fig. 2a, b)

$$R_N = R + \frac{R}{2} = \frac{3}{2}R, \quad I_N = \frac{1}{2}I_E = \frac{1}{2} \frac{E}{R + R/2} = \frac{1}{3} \frac{E}{R}$$

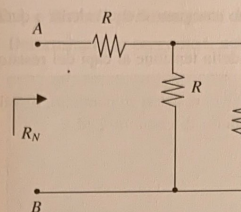


Fig. 2a

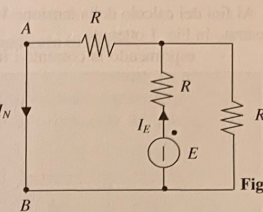


Fig. 2b

Il calcolo di V_{AB} può pertanto essere eseguito nel circuito equivalente di Fig. 3. Si ha che

$$V_{AB} = \frac{1}{1/(3R) + 1/(2R) + 1/R_N} (I + I_N) \approx 14,44\text{ V}$$

avendo tenuto conto del collegamento parallelo tra i generatori di corrente ed i resistori.

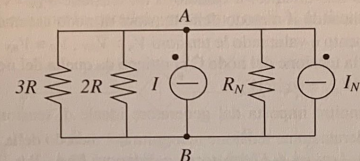
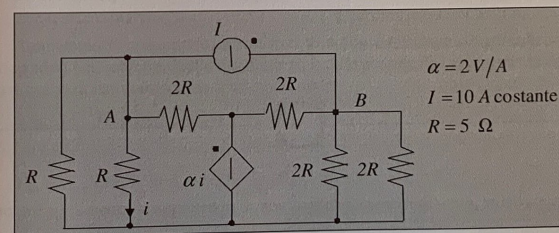


Fig. 3

1.2.2 – Metodo delle tensioni di nodo

Determinare la tensione V_{AB} nel circuito mostrato in figura.



Ai fini del calcolo della tensione V_{AB} il circuito assegnato è equivalente a quello mostrato in Fig. 1 ottenuto:

- esprimendo la corrente i in funzione della tensione ai capi del resistore in cui scorre;
- sostituendo a ciascuna delle due coppie di resistori in parallelo, di valore R e $2R$, il rispettivo resistore equivalente di valore $R/2$ ed R .

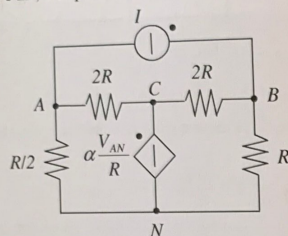


Fig. 1

Con riferimento a tale circuito, il calcolo della tensione $V_{AB} = V_{AN} - V_{BN}$ può essere effettuato applicando il metodo delle tensioni di nodo assumendo il nodo N come nodo di riferimento e valutando le tensioni $V_A \equiv V_{AN}$, $V_B \equiv V_{BN}$.

Da osservare che la tensione del nodo C si ottiene da quella del nodo A essendo $V_C \equiv V_{CN} = (\alpha/R)V_{AN} = (\alpha/R)V_A$.

Tale tensione è inoltre imposta dal generatore ideale di tensione $(\alpha V_A)/R$ e quindi non va considerata come tensione incognita nel metodo delle tensioni di nodo (si veda M. Raugi, *Lezioni di Elettrotecnica*, Edizioni Plus - Par. 2.14).

Conseguentemente, il sistema risolutivo, ottenuto considerando i soli nodi A, B, risulta

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{R/2} + \frac{1}{2R} \right) V_A - \left(\frac{1}{2R} \right) \frac{\alpha}{R} V_A = -I \\ \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{2R} \right) V_B - \left(\frac{1}{2R} \right) \frac{\alpha}{R} V_A = I \end{cases}$$

la cui soluzione è

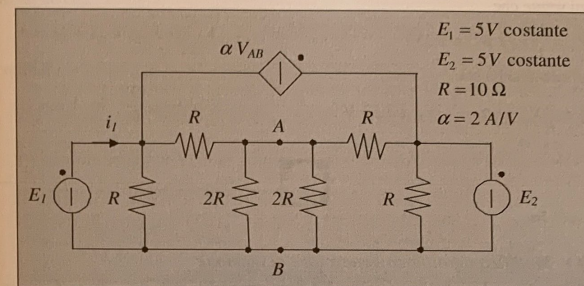
$$V_A = -500/23 \text{ V}, \quad V_B = 700/23 \text{ V};$$

ne segue che $V_{AB} = -1200/23 \approx -52,17 \text{ V}$.



1.2.3 - Metodo delle tensioni di nodo

Determinare la corrente i_1 nel circuito mostrato in figura.



Il circuito assegnato può essere ridisegnato così come mostrato in Fig. 1, avendo sostituito ai resistori in parallelo posti tra i nodi A, B il resistore equivalente di valore R .

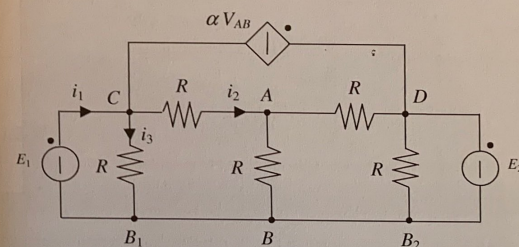


Fig. 1

Per il I principio di Kirchhoff applicato al nodo C la corrente i_1 è data da

$$i_1 = i_3 + i_2 + \alpha V_{AB}.$$

Assumendo B come nodo di riferimento ed osservando che tutte le tensioni di nodo sono note eccetto quella del nodo A, è utile esprimere la corrente da determinare in funzione proprio delle tensioni di nodo:

$$i_1 = \frac{V_C - V_{B1}}{R} + \frac{V_C - V_A}{R} + \alpha V_A.$$

Si ha che

$$V_{B1} = V_{B2} = 0, \quad V_C = E_1 + V_{B1} = E_1, \quad V_D = E_2 + V_{B2} = E_2$$

mentre per il nodo A, applicando il metodo delle tensioni di nodo, vale l'equazione

$$V_A \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R} \right) - \frac{1}{R} V_C - \frac{1}{R} V_D = 0$$

da cui segue che

$$V_A = \frac{1}{3} (E_1 + E_2) \cong 3,33 \text{ V}.$$

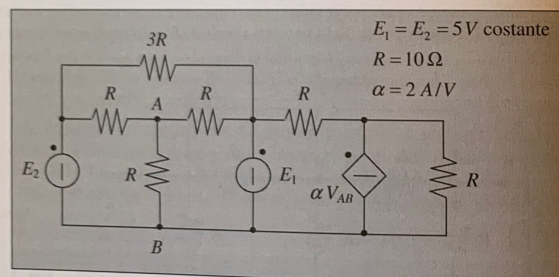
In definitiva si ha che

$$i_1 = \frac{2}{R} V_C + \left(\alpha - \frac{1}{R} \right) V_A \cong 7,33 \text{ V}.$$



1.2.4 - Modifica topologica generatore di tensione

Determinare la potenza erogata dal generatore E_1 .



Si fa riferimento al circuito equivalente di Fig. 1, ottenuto dal circuito assegnato applicando la modifica topologica al generatore di tensione E_1 e sostituendo al generatore di corrente e al resistore in parallelo l'equivalente Thévenin.

La potenza P_1 erogata dal generatore E_1 è data da $P_1 = E_1 I_1$ essendo

$$I_1 = I_A + I_B + I_C.$$

Risulta

$$V_{AB} = \frac{R/2}{R + R/2} E_1 + \frac{R/2}{R + R/2} E_2 = \frac{10}{3} \text{ V},$$

$$I_A = \frac{E_1 - V_{AB}}{R} = \frac{1}{6} \text{ A},$$

$$I_B = \frac{E_1 - E_2}{3R} = 0,$$

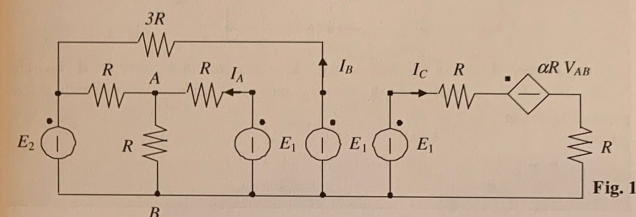
$$I_C = \frac{E_1 - \alpha R V_{AB}}{2R} = -\frac{37}{12} \text{ A}.$$

Ne segue che

$$I_1 = I_A + I_B + I_C = -\frac{35}{12} \text{ A}$$

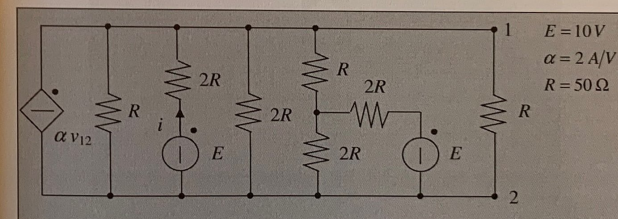
e quindi

$$P_1 = E_1 I_1 = -\frac{175}{12} \cong -14,6 \text{ W}.$$



1.2.5 - Teorema di Millman

Determinare la corrente i nel circuito mostrato in figura.



Ai fini del calcolo della corrente i il circuito assegnato è equivalente a quello mostrato in Fig. 1 avendo:

- raggruppati i rami resistivi in parallelo e sostituiti con una resistenza equivalente di valore $R_p = R // R // (2R) = (R/2) // (2R) = (2/5)R$;

- applicato il teorema di Thévenin all'insieme di rami i cui nodi sono adiacenti ai nodi indicati con 1, 2 nel circuito assegnato.

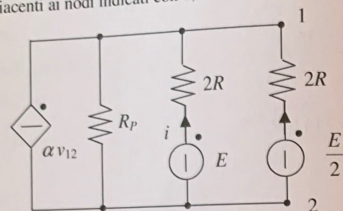


Fig. 1

Considerato il ramo in cui scorre la corrente incognita i , si ha che $v_{12} = -2Ri + E$ dove la tensione di ramo v_{12} può essere calcolata applicando il teorema di Millman.

Risulta

$$v_{12} = \frac{\frac{E/2}{2R} + \frac{E}{2R} + \alpha v_{12}}{\frac{1}{2R} + \frac{1}{2R} + \frac{1}{R_p}}$$

da cui si ottiene

$$v_{12} = \frac{3E}{14 - 4R\alpha} = -\frac{15}{193} \approx -0,078 \text{ V}$$

Si ha pertanto che

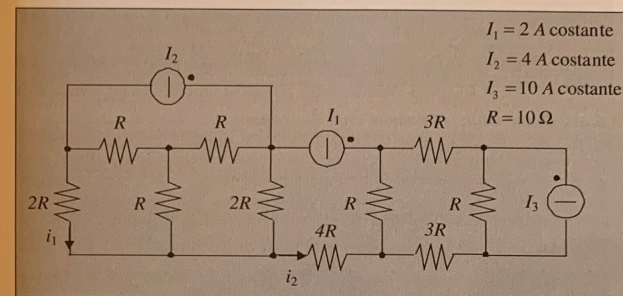
$$i = \frac{E - v_{12}}{2R} \approx 0,101 \text{ A.}$$



1.3 SEZIONE C – ESERCIZI DA SVOLGERE

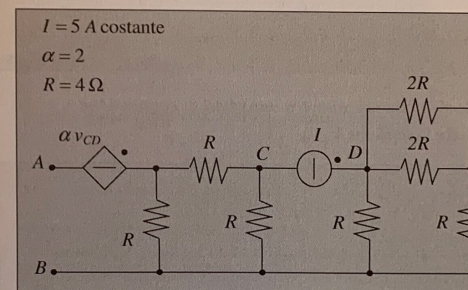
1.3.1 – Calcolo di correnti

Nel circuito mostrato in figura determinare le correnti i_1, i_2 .



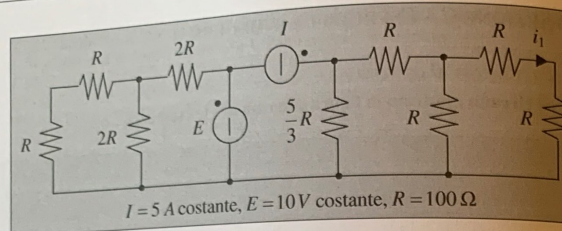
1.3.2 – Equivalente Thevenin

Determinare l'equivalente Thévenin visto dai morsetti AB del circuito di figura.



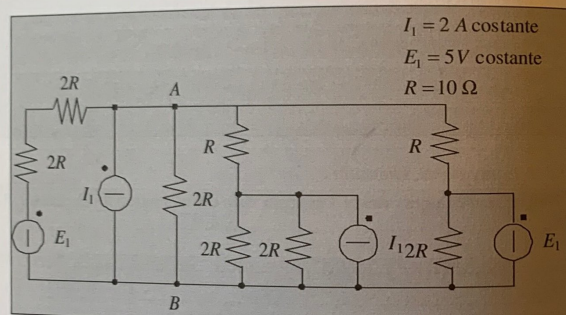
1.3.3 – Calcolo di potenze

Determinare la corrente i e le potenze P_E, P_I erogate rispettivamente dal generatore di tensione e da quello di corrente nel circuito mostrato in figura.



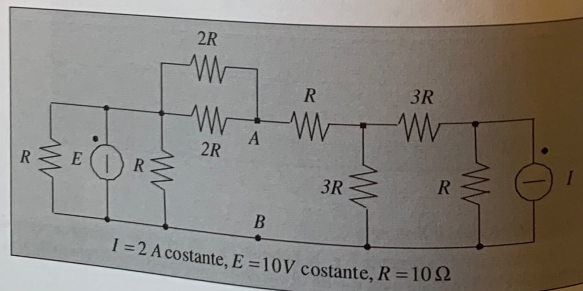
1.3.4 - Calcolo della tensione ai capi di un bipolo

Determinare la tensione V_{AB} .



1.3.5 - Calcolo della tensione tra due punti di connessione

Determinare la tensione V_{AB} .



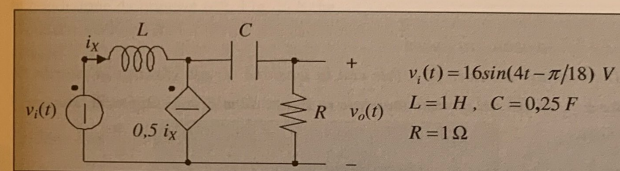
Capitolo 2

CIRCUITI A REGIME SINUSOIDALE

2.1 SEZIONE A - ESERCIZI SVOLTI

2.1.1 - Metodo del tableau

Calcolare $v_o(t)$ nel circuito di figura, supponendolo a regime.



Poiché per ipotesi il circuito è a regime ed essendo l'eccitazione sinusoidale, è possibile calcolare la tensione di uscita $v_o(t)$ utilizzando il metodo fasoriale. A tal fine si determina innanzitutto il fasore della tensione di ingresso; posto

$$v_i(t) = \text{Im}\{V_i \exp(j\omega t)\}, \quad \omega = 4 \text{ rad/s},$$

si ha che $\dot{V}_i = 16 \exp(-j\pi/18)$.

Ridisegnando il circuito per l'analisi fasoriale come in Fig. 1, si ha che

$$\dot{V}_o = R \dot{I}_o \text{ da cui } v_o(t) = \text{Im}\{\dot{V}_o \exp(j\omega t)\} = R \text{Im}\{\dot{I}_o \exp(j\omega t)\}.$$

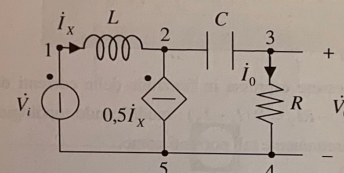


Fig. 1

Il fasore della corrente di uscita può essere calcolato risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \dot{I}_x + 0.5 \dot{I}_x - \dot{I}_o = 0 \\ j\omega L \dot{I}_x + \frac{1}{j\omega C} \dot{I}_o + R \dot{I}_o - \dot{V}_i = 0 \end{cases}$$

le cui equazioni sono rispettivamente ottenute applicando il I principio di Kirchhoff al nodo 2 ed il II principio di Kirchhoff alla maglia individuata dai nodi 1, 2, 3, 4, 5.

Si ottiene

$$\dot{I}_o = \frac{\dot{V}_i}{(2/3)j\omega L + 1/(j\omega C) + R} \cong 8,2 \exp(-j1,2) \text{ A}$$

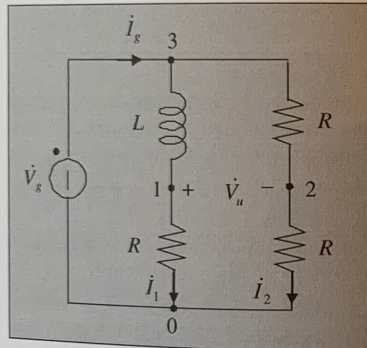
da cui

$$v_o(t) = R \operatorname{Im}\{\dot{I}_o \exp(j\omega t)\} = 8,2 \sin(4t - 1,2) \text{ V}.$$



2.1.2 - Sfasamento tra fasori

Determinare il valore di L tale che la tensione $\dot{V}_u$ sia sfasata in ritardo rispetto a $\dot{V}_g$ di 60° nel circuito mostrato in figura dove $R = 2 \text{ k}\Omega$, $f = 50 \text{ Hz}$.



La tensione $\dot{V}_u$ può essere espressa in funzione delle correnti di ramo $\dot{I}_1, \dot{I}_2$ come $\dot{V}_u = \dot{V}_{10} - \dot{V}_{20} = R\dot{I}_1 - R\dot{I}_2 = R(\dot{I}_1 - \dot{I}_2)$; modificando topologicamente il generatore $\dot{V}_g$ si trovano direttamente tali correnti come

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{V}_g}{R + j\omega L}, \dot{I}_2 = \frac{\dot{V}_g}{2R}.$$

Ne segue che

$$\dot{V}_u = R[1/(R + j\omega L) - 1/(2R)]\dot{V}_g = \frac{1 - j\omega L/R}{2 + j\omega L/R}\dot{V}_g = \alpha \dot{V}_g$$

dove la forma polare del coefficiente di proporzionalità α tra i fasori di uscita e di ingresso è data da

$$\alpha = \frac{1 - j\omega L/R}{2 + j\omega L/R} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \exp[-j \arctg(\omega L/R)]}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \exp[j \arctg(\omega L/R)]} = \frac{1}{2} \exp[-j 2 \arctg(\omega L/R)]$$

Poiché

$$\angle \dot{V}_u = \angle \alpha + \angle \dot{V}_g$$

da cui

$$\angle \dot{V}_u - \angle \dot{V}_g = \angle \alpha,$$

la condizione da imporre (cfr. Fig. 1) è che

$$\angle \alpha = -60^\circ = -\pi/3$$

ovvero

$$-2 \arctg(\omega L/R) = -\pi/3.$$

L'equazione ottenuta è risolta da

$$L = \frac{R}{\omega} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right) \cong 3,7 \text{ H}.$$

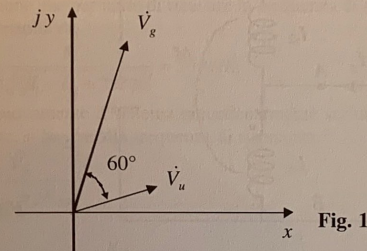
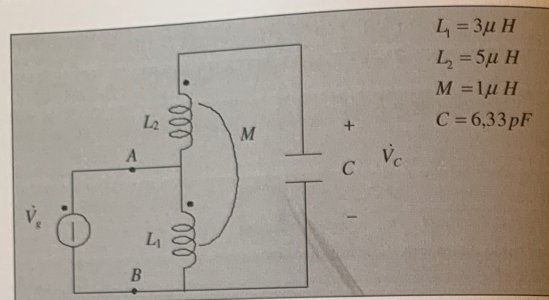


Fig. 1



2.1.3 - Bipolo risonante

Per il circuito mostrato in figura determinare la frequenza f_0 per la quale l'ammettenza di ingresso ai morsetti A-B è nulla. Supponendo poi che $\dot{V}_g = 20 \text{ V}$ e che la frequenza di lavoro sia f_0 , determinare la tensione sul condensatore $\dot{V}_C$.



Scelti per le correnti i riferimenti mostrati nel circuito di Fig. 1, si ha che l'ammettenza di ingresso vista dai nodi A - B è data da

$$\bar{Y} = \frac{\dot{I}_g}{\dot{V}_g} = \frac{\dot{I}_1 - \dot{I}_2}{\dot{V}_g}.$$

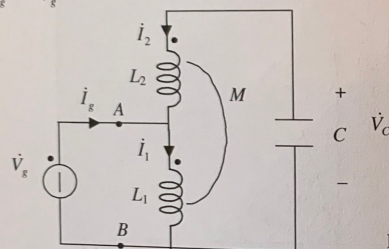


Fig. 1

Al variare della frequenza del generatore varia l'impedenza degli elementi circuitali presenti nel circuito assegnato; ne segue che i fasori delle correnti e delle tensioni definiti nel circuito sono funzione della frequenza, come pure quindi l'ammettenza di ingresso.

La condizione di ammettenza nulla ovvero la condizione di risonanza del bipolo visto dai nodi A - B può essere espressa non solo dall'equazione

$$\bar{Y}(f_0) = 0$$

ma anche risolvendo il circuito per la generica frequenza f ed imponendo quindi che

$$\dot{I}_g(f_0) = 0$$

o, in modo equivalente, che,

$$\dot{I}_1(f_0) = \dot{I}_2(f_0).$$

Le equazioni risolutive, valide indipendentemente dalla frequenza del generatore di ingresso, si ottengono applicando il I principio di Kirchhoff al nodo A ed il II principio di Kirchhoff alla maglia di ingresso ed alla maglia comprendente gli induttori mutuamente accoppiati; si ha il sistema

$$\begin{cases} \dot{I}_g = \dot{I}_1 - \dot{I}_2 \\ jX_{L1}\dot{I}_1 + jX_M\dot{I}_2 = \dot{V}_g \\ jX_{L2}\dot{I}_2 + jX_M\dot{I}_1 + jX_{L1}\dot{I}_1 + jX_M\dot{I}_2 - jX_C\dot{I}_2 = 0 \end{cases}$$

dove

$$X_{L1} = \omega L_1, X_{L2} = \omega L_2, X_M = \omega M, X_C = 1/(\omega C).$$

In particolare, dalla terza equazione del sistema si ricava che

$$\dot{I}_2 = -\frac{X_{L1} + X_M}{-X_C + X_{L2} + X_M} \dot{I}_1.$$

Imponendo che

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2$$

ossia che

$$-\frac{X_{L1} + X_M}{-X_C + X_{L2} + X_M} = 1$$

si ottiene l'equazione che permette di ricavare la frequenza di risonanza.

Tale equazione è risolta da

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{(L_1 + L_2 + 2M)C}} = 20 \text{ MHz}.$$

Considerato nuovamente il sistema precedentemente scritto ed in particolare la seconda equazione, si ha che alla frequenza di risonanza

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 = \frac{\dot{V}_g}{jX_{L1} + jX_{M0}}$$

da cui segue che

$$\dot{V}_C = (-jX_{C0})(-\dot{I}_2) = \frac{X_{C0}}{X_{L1} + X_{M0}} \dot{V}_g,$$

dove il pedice 0 indica che le reattanze induttive e capacitive sono valutate per $\omega = \omega_0$.

Ne segue che alla frequenza di risonanza e nel circuito considerato la tensione ai capi del condensatore è in fase con quella di ingresso ed il loro rapporto è

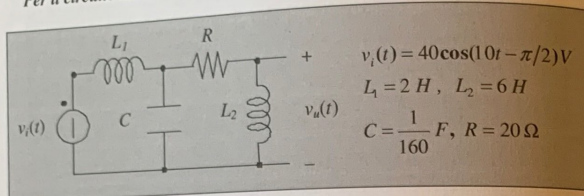
$$\alpha = \frac{X_{C0}}{X_{L1} + X_{M0}} = \frac{1}{\omega_0^2(L_1 + M)C} = \frac{L_1 + L_2 + 2M}{L_1 + M} = 2,5.$$

Nel caso considerato in cui $\dot{V}_g = 20 \text{ V}$ si ha che $\dot{V}_C = \alpha \dot{V}_g = 50 \text{ V}$.



2.1.4 – Teorema di Thévenin

Per il circuito mostrato in figura determinare la tensione $v_u(t)$ a regime.



Si utilizza il metodo fasoriale per determinare la tensione $v_u(t)$ a regime essendo il generatore di ingresso di tipo sinusoidale.

Posto

$$v_i(t) = \text{Re}\{\dot{V}_i \exp(j\omega t)\}, \dot{V}_i = V_i \exp(j\phi_i), V_i = 40 \text{ V}, \phi_i = -\frac{\pi}{2}, \omega = 10 \text{ rad/s},$$

si determina il fasore associato alla tensione di uscita

$$v_u(t) = \text{Re}\{\dot{V}_u \exp(j\omega t)\}, \dot{V}_u = V_u \exp(j\phi_u).$$

Ridisegnando il circuito come in Fig. 1a ed applicando il teorema di Thévenin alla parte di circuito racchiusa dal rettangolo tratteggiato A, il calcolo del fasore $\dot{V}_u$ può essere effettuato considerando il circuito equivalente di Fig. 1b.

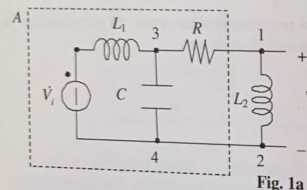


Fig. 1a

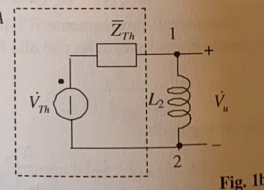


Fig. 1b

Il circuito per il calcolo della tensione e della impedenza da utilizzare nel circuito equivalente di Thévenin è mostrato in Fig. 2.

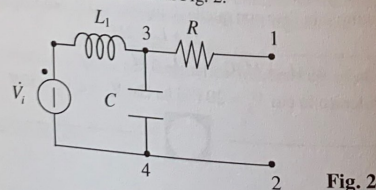


Fig. 2

Applicando la regola del partitore di tensione in tale circuito, si ha che

$$\dot{V}_{Th} = \dot{V}_{12} = \dot{V}_{34} = \frac{1/(j\omega C)}{j\omega L_1 + 1/(j\omega C)} \dot{V}_i = \frac{1}{1 - \omega^2 L_1 C} \dot{V}_i = -4\dot{V}_i.$$

Nel calcolo dell'impedenza di Thévenin, il generatore di tensione nel circuito di Fig. 2 è cortocircuitato; tenendo conto dei collegamenti parallelo-serie tra le impedenze nel circuito così ottenuto, si ha che

$$\bar{Z}_{Th} = R + \frac{(j\omega L_1) \parallel 1/(j\omega C)}{j\omega L_1 + 1/(j\omega C)} = R + \frac{j\omega L_1}{1 - \omega^2 L_1 C} = 20 - j80 \Omega.$$

In definitiva, applicando la regola del partitore di tensione nel circuito di Fig. 1b, il fasore della tensione di uscita è dato da

$$\dot{V}_u = \frac{j\omega L_2}{j\omega L_2 + \bar{Z}_{Th}} \dot{V}_{Th} = \frac{-j12}{1 - j} 40 \exp(-j\pi/2) = 240\sqrt{2} \exp(j5\pi/4) \text{ V};$$

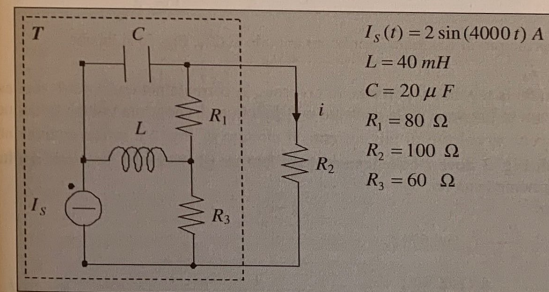
ne segue che

$$v_u(t) = \text{Re}\{\dot{V}_u \exp(j\omega t)\} = 240\sqrt{2} \cos\left(10t + \frac{5\pi}{4}\right) \text{ V}.$$



2.1.5 – Teorema di Norton

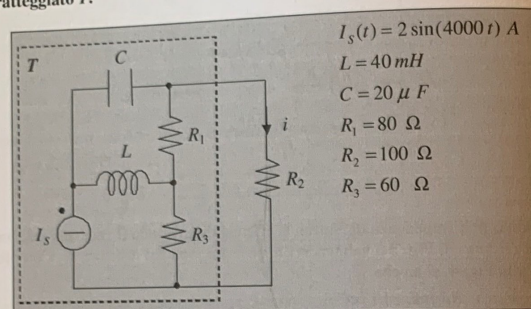
Supponendo il circuito di figura a regime, determinare la corrente i applicando il teorema di Norton alla parte di circuito racchiusa dal rettangolo tratteggiato T.



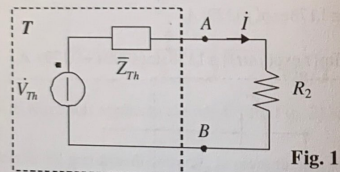
Poiché il circuito è a regime e l'eccitazione I_s è sinusoidale, l'applicazione del teorema di Norton permette di ottenere il circuito equivalente di Fig. 1 per il calcolo del fasore della corrente i .

2.1.6 - Teorema di Thévenin

Supponendo il circuito di figura a regime, determinare la corrente i applicando il teorema di Thévenin alla parte di circuito racchiusa dal rettangolo tratteggiato T .



Il circuito è a regime e l'eccitazione $I_s(t)$ è sinusoidale; il circuito equivalente di Thévenin per il calcolo del fasore della corrente i è mostrato in Fig. 1.



Il calcolo del generatore di Thévenin deve essere effettuato staccando il ramo R_2 nel circuito assegnato; il circuito da considerare è mostrato in Fig. 2, dove il fasore $\dot{I}_s$ è scelto in modo tale che

$$\dot{I}_s(t) = \text{Im}\{\dot{I}_s \exp(j\omega t)\}, \omega = 4000 \text{ rad/s}, \dot{I}_s = 2 \text{ A}$$

Poiché la corrente ai nodi A, B è nulla e quindi $\dot{I}_C = \dot{I}_1, \dot{I}_3 = \dot{I}_s$ si ha che

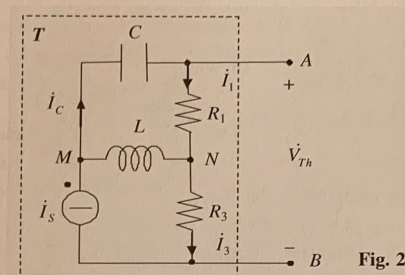
$$\dot{V}_{Th} = \dot{V}_{AB} = \dot{V}_{AN} + \dot{V}_{NB} = R_1 \dot{I}_C + R_3 \dot{I}_s.$$

Applicando la regola del partitore di corrente ai rami in parallelo $(M, A, N), (M, N)$, si ha che

$$\dot{I}_C = \frac{j\omega L}{j\omega L + [R_1 + 1/(j\omega C)]} \dot{I}_s = \alpha \dot{I}_s$$

dove

$$\alpha = \frac{\omega^2 LC}{\omega^2 LC - 1 - jR_1 C \omega} = 0,838 + j0,455.$$



Ne segue che

$$\dot{V}_{Th} = \beta \dot{I}_s, \beta = \alpha R_1 + R_2 \approx 167,054 + j36,368 \Omega.$$

Il calcolo dell'impedenza di Thévenin si effettua disattivando il generatore di corrente nel circuito di Fig. 1 e valutando l'impedenza vista dal resistore R_2 . Tale impedenza coincide con l'impedenza di Norton calcolata nell'Esercizio 2.1.5:

$$\bar{Z}_{Th} = 121,816 + j33,527 \Omega$$

Considerato nuovamente il circuito equivalente di Thévenin di Fig. 1 ed applicando la regola del partitore di tensione si ha che

$$\dot{I} = \frac{\dot{V}_{AB}}{R_2} = \frac{R_2}{R_2 + \bar{Z}_{Th}} \frac{\dot{V}_{Th}}{R_2} = \frac{R_2}{R_2 + \bar{Z}_{Th}} \frac{\beta}{R_2} \dot{I}_s = 1,178 \exp(j0,129) \text{ A}$$

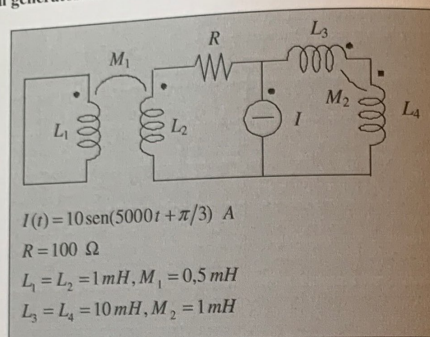
Ne segue che

$$i(t) = \text{Im}\{\dot{I} \exp(j\omega t)\} = 1,178 \sin(4000t + 0,129) \text{ A},$$

risultato ovviamente coincidente con quello ricavato nell'Esercizio 2.1.5.

2.1.7 – Metodo del tableau, impedenza vista da un generatore

Considerando il circuito a regime determinare la potenza attiva e reattiva erogata dal generatore I .



Posto $\omega = 5000 \text{ rad/s}$, $\dot{I} = 10 \angle \pi/3 \text{ A}$ in modo tale che $I(t) = \text{Im}\{\dot{I} \exp(j\omega t)\}$, si considera il circuito per l'analisi fasoriale mostrato in Fig. 1.

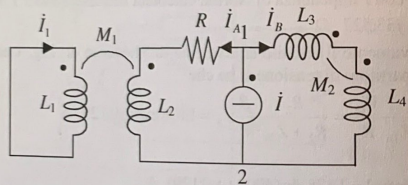


Fig. 1

La potenza attiva e reattiva P, Q erogata dal generatore di corrente può essere calcolata valutandone la potenza complessa $\bar{S}$:

$$P = \text{Re}\{\bar{S}\}, Q = \text{Im}\{\bar{S}\}, \bar{S} = \frac{1}{2} \dot{V}_{12} \dot{I}^*$$

Il problema è quindi ricondotto alla determinazione della tensione $\dot{V}_{12}$ ai capi del generatore stesso. Tale tensione può essere calcolata in funzione delle correnti di ramo presenti nel circuito; in particolare si ha che:

$$\dot{V}_{12} = j\omega L_3 \dot{I}_B - j\omega M_2 \dot{I}_B + j\omega L_4 \dot{I}_B - j\omega M_2 \dot{I}_B = j\omega (L_3 + L_4 - 2M_2) \dot{I}_B = j90 \dot{I}_B$$

Applicando il metodo del tableau si ottiene il seguente sistema di equazioni nelle incognite $\dot{I}_A, \dot{I}_B, \dot{I}_1$:

$$\begin{cases} \dot{I} = \dot{I}_A + \dot{I}_B \\ 0 = j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M_1 \dot{I}_A \\ 0 = j\omega L_3 \dot{I}_B - j\omega M_2 \dot{I}_B + j\omega L_4 \dot{I}_B - j\omega M_2 \dot{I}_B - j\omega L_2 \dot{I}_A - j\omega M_1 \dot{I}_1 - R \dot{I}_A \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix}$$

Dalla (1) (equazione al nodo 1) si ricava $\dot{I}_A = \dot{I} - \dot{I}_B$ mentre dalla (2) (equazione alla maglia comprendente L_1) si ha $\dot{I}_1 = (-M_1/L_1) \dot{I}_A = -0,5 \dot{I}_A$ ⁽¹⁾; sostituendo tali valori nell'equazione (3) relativa alla maglia L_3, L_4, L_2, R si ottiene

$$\dot{I}_B = \frac{R + j\omega(L_2 - 0,5M_1)}{R + j\omega(L_2 + L_3 + L_4 - 2M_1 - 2M_2)} \dot{I} = 0,73 \exp(-41,005^\circ) \dot{I}$$

In definitiva si ha che

$$\dot{V}_{12} = 65,704 \exp(j48,995^\circ) \dot{I}$$

e quindi

$$\bar{S} = \frac{1}{2} \dot{V}_{12} \dot{I}^* = \frac{1}{2} 65,704 \exp(j48,995^\circ) |\dot{I}|^2 = 2156 + j2479 \text{ VA};$$

ne segue che

$$P = 2156 \text{ W}, Q = 2479 \text{ VAR}.$$

Approfondimento

Il calcolo della tensione $\dot{V}_{12}$ ai capi del generatore di corrente può essere eseguito valutando le impedenze $\bar{Z}_A, \bar{Z}_B$ viste dal generatore stesso in accordo al circuito equivalente mostrato in Fig. 2.

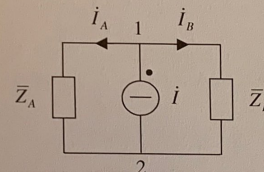


Fig. 2

Applicando il II principio di Kirchhoff rispettivamente alle maglie formate da $\dot{I}, R, L_2$ e da $\dot{I}, L_3, L_4$ (cfr. Fig. 2) si ha che

$$\begin{cases} \dot{V}_{12} = R \dot{I}_A + j\omega L_2 \dot{I}_A + j\omega M_1 \dot{I}_1 \\ \dot{V}_{12} = j\omega L_3 \dot{I}_B - j\omega M_2 \dot{I}_B + j\omega L_4 \dot{I}_B - j\omega M_2 \dot{I}_B \end{cases}$$

da cui, tenendo conto che $\dot{I}_1 = (-M_1/L_1) \dot{I}_A$, si ricava che

⁽¹⁾ Da osservare che nella maglia L_1 dove l'induttore mutuamente accoppiato con L_2 è cortocircuitato la corrente non è nulla; in particolare la corrente $\dot{I}_1$ è in opposizione di fase con la corrente $\dot{I}_A$.

$$\bar{Z}_A = \dot{V}_{12} / \dot{I}_A = R + j\omega L_2 [1 - M_1^2 / (L_1 L_2)] = 100 + j3,75 \Omega$$

$$\bar{Z}_B = \dot{V}_{12} / \dot{I}_B = j\omega(L_3 + L_4 - 2M_2) = j90 \Omega$$

Poiché le impedenze $\bar{Z}_A, \bar{Z}_B$ sono in parallelo, posto $\bar{Z}_P = \bar{Z}_A // \bar{Z}_B = 43,11 + j49,58 \Omega$, si ha che $\dot{V}_{12} = \bar{Z}_P \dot{I}$ da cui segue che

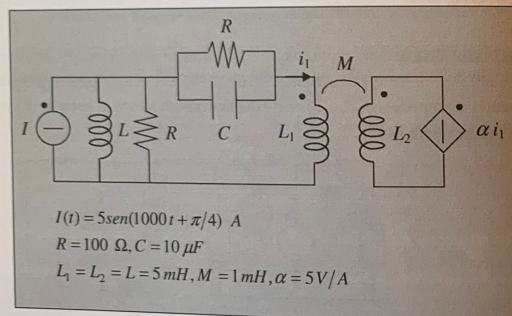
$$\bar{S} = \frac{1}{2} \dot{V}_{12} \dot{I}^* = \frac{1}{2} \bar{Z}_P |\dot{I}|^2 = 2156 + j2479 \text{ VA}$$

ovviamente in accordo con quanto già determinato.



2.1.8-Metodo del tableau, energia elettromagnetica media

Considerando il circuito a regime determinare l'energia elettromagnetica media nei due induttori L_1, L_2 mutuamente accoppiati.



L'energia elettromagnetica media immagazzinata negli induttori accoppiati può essere calcolata come

$$W = \frac{1}{2} L_1 I_{1\text{eff}}^2 + \frac{1}{2} L_2 I_{2\text{eff}}^2 + M I_{1\text{eff}} I_{2\text{eff}} \cos \varphi_{12} = \frac{1}{4} L_1 I_1^2 + \frac{1}{4} L_2 I_2^2 + \frac{1}{2} M I_1 I_2 \cos \varphi_{12}$$

essendo $I_{1\text{eff}} = I_1 / \sqrt{2}, I_{2\text{eff}} = I_2 / \sqrt{2}$, rispettivamente i valori efficaci delle correnti sinusoidali $i_1(t), i_2(t)$ di valore massimo I_1, I_2 e φ_{12} il relativo angolo di sfasamento. L'analisi fasoriale permette di determinare tali quantità.

Posto $\omega = 1000 \text{ rad/s}, i = 5 \exp(j\pi/4) \text{ A}$ in modo tale che

$$I(t) = \text{Im}\{\dot{I} \exp(j\omega t)\}$$

si considera il circuito per l'analisi fasoriale mostrato in Fig. 1 dove

$$\bar{Z}_{RL} = R // (j\omega L) = \frac{j\omega RL}{R + j\omega L} = 1,176 + j4,706 \Omega,$$

$$\bar{Z}_{RC} = R // [1/(j\omega C)] = \frac{R}{1 + j\omega RC} = 19,231 - j3,846 \Omega,$$

$$\dot{E} = \bar{Z}_{RL} \dot{I} = -12,478 + j20,797 \text{ V}.$$

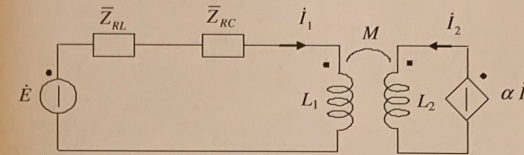


Fig. 1

Il circuito così semplificato è equivalente al circuito assegnato per ciò che riguarda il calcolo dei fasori $\dot{I}_1, \dot{I}_2$ associati alle correnti negli induttori accoppiati. In particolare, il generatore di corrente con in parallelo l'impedenza $\bar{Z}_{RL}$ è stato sostituito, nel circuito di Fig. 1, con l'equivalente di Thévenin; ciò permette di scrivere il seguente sistema risolutivo ottenuto applicando il II principio di Kirchhoff a ciascuna delle due maglie da cui è formato il circuito stesso:

$$\begin{cases} \dot{E} = \bar{Z}_{RL} \dot{I}_1 + \bar{Z}_{RC} \dot{I}_1 + j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2 \\ \alpha \dot{I}_1 = j\omega L_2 \dot{I}_2 + j\omega M \dot{I}_1 \end{cases}$$

Sostituendo i valori noti e riordinando i termini in ciascuna delle due equazioni il sistema può essere riscritto come

$$\begin{cases} (20,407 + j5,86) \dot{I}_1 + j \dot{I}_2 = -12,478 + j20,797 \\ (-5 + j) \dot{I}_1 + 5 j \dot{I}_2 = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono

$$\dot{I}_1 = -0,305 + j1,052 = 1,905 \exp(j106,155^\circ) \text{ A},$$

$$\dot{I}_2 = 1,113 + j0,094 = 1,117 \exp(j4,845^\circ) \text{ A}.$$

Ne segue che

$$I_1 = 1,905 \text{ A}, I_2 = 1,117 \text{ A}, \varphi_{12} = 106,155^\circ - 4,845^\circ = 101,31^\circ$$

e quindi

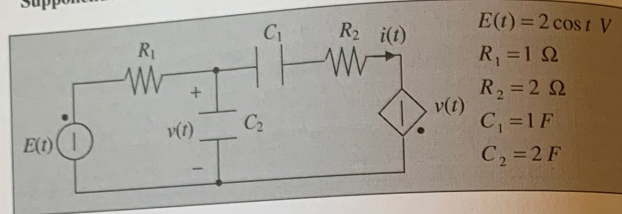
$$W = 2,94 \text{ mJ}.$$



2.2 SEZIONE B – ESERCIZI CON TRACCIA DELLA SOLUZIONE

2.2.1 – Metodo delle correnti di maglia

Supponendo il circuito di figura a regime determinare la corrente $i(t)$.



L'eccitazione del circuito è sinusoidale di pulsazione $\omega = 1 \text{ rad/s}$.

Posto

$$\dot{E} = 2\angle 0^\circ \text{ V} \rightarrow E(t) = \text{Re}\{\dot{E} \exp(j\omega t)\}$$

si considera il circuito per l'analisi fasoriale mostrato in Fig. 1.

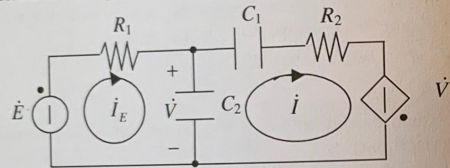


Fig. 1

Applicando il metodo delle correnti di maglia per determinare il fasore $\dot{i}$, il ramo con il condensatore C_2 è assunto come albero mentre le correnti di maglia monocorda sono indicate con $\dot{i}_E, \dot{i}$. Vale il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \dot{E} = [R_1 + 1/(j\omega C_2)]\dot{i}_E - [1/(j\omega C_2)]\dot{i} & \text{maglia } \dot{i}_E \\ \dot{V} = [1/(j\omega C_2) + 1/(j\omega C_1) + R_2]\dot{i} - [1/(j\omega C_2)]\dot{i}_E & \text{maglia } \dot{i} \\ \dot{V} = [1/(j\omega C_2)](\dot{i}_E - \dot{i}) & \text{relazione tra } \dot{V} \text{ e le correnti } \dot{i}_E, \dot{i} \end{cases}$$

Sostituendo i valori noti e riordinando i termini nelle singole equazioni il sistema risolutivo per le correnti $\dot{i}_E, \dot{i}$ risulta:

$$\begin{cases} (2 - j)\dot{i}_E + j\dot{i} = 4 \\ -j\dot{i}_E - 2(1 - j)\dot{i} = 0 \end{cases}$$

da cui si ottiene

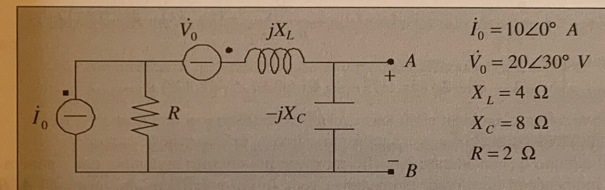
$$\begin{aligned} \dot{i} &= \frac{4j}{-3 + j6} = \frac{4 \exp(j\pi/2)}{3\sqrt{5} \exp[j\pi + \arctg(-6/3)]} = \\ &= \frac{4\sqrt{5}}{15} \exp(-j0,464) = \frac{4\sqrt{5}}{15} \exp(-j26,57^\circ) \text{ A} \end{aligned}$$

$$\text{Segue che } i(t) = \text{Re}\{\dot{i} \exp(j\omega t)\} = \frac{4\sqrt{5}}{15} \cos(t - 0,464) \text{ A.}$$



2.2.2 – Equivalente di Norton

Considerato il circuito mostrato in figura determinarne l'equivalente di Norton tra i terminali A, B.



Il circuito equivalente di Norton è mostrato in Fig. 1; occorre pertanto determinare $\dot{i}_N, \bar{Z}_N$.

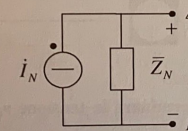


Fig. 1

Determinazione di $\dot{i}_N$

La corrente $\dot{i}_N$ è valutata come corrente di cortocircuito tra i terminali A, B così come mostrato in Fig. 2.

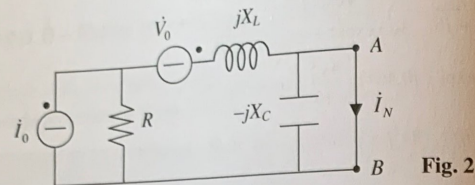


Fig. 2

Applicando il principio di sovrapposizione degli effetti si ha che

$$i_N = i_{N,I} + i_{N,V}$$

essendo $i_{N,I}$, $i_{N,V}$ i contributi dovuti rispettivamente al generatore di corrente ed a quello di tensione.

Tenendo conto che nell'impedenza capacitiva non scorre corrente poiché è in parallelo ad un corto circuito (cfr. Fig. 2) si ha che:

$$i_{N,I} = \frac{R}{R + jX_L} i_0 = 2 - j4 \text{ A}, \quad i_{N,V} = \frac{V_0}{R + jX_L} = (2 + \sqrt{3}) + j(1 - 2\sqrt{3}) \text{ A}$$

da cui segue che

$$i_N = (4 + \sqrt{3}) - j(3 + 2\sqrt{3}) \approx 5,73 - j6,46 \approx 8,64 \angle (-48,43^\circ) \text{ A}$$

Determinazione di $\bar{Z}_N$

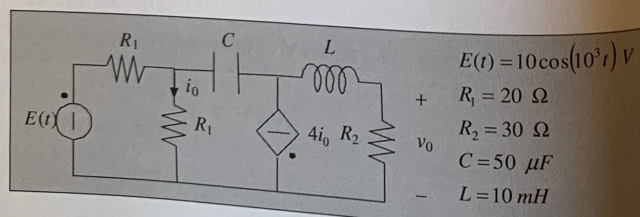
Il circuito da considerare è quello mostrato nel circuito assegnato con i generatori indipendenti disattivati; l'impedenza vista in tali condizioni dai terminali A, B risulta

$$\bar{Z}_N = (R + jX_L) \parallel (-jX_C) \approx 8 \angle 36,87^\circ \Omega$$



2.2.3 - Metodo delle tensioni di nodo

Utilizzando l'analisi nodale determinare la tensione $v_o(t)$ nel circuito mostrato in figura.



Si ipotizza il circuito a regime sinusoidale con $\omega = 10^3 \text{ rad/s}$.

Posto $\dot{E} = 10 \text{ V}$ in modo tale che $E(t) = \text{Re}\{\dot{E} \exp(j\omega t)\}$ si considera il circuito per l'analisi fasoriale mostrato in Fig. 1 dove le reattanze capacitiva e reattiva valgono rispettivamente

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = 20 \Omega, \quad X_L = \omega L = 10 \Omega$$

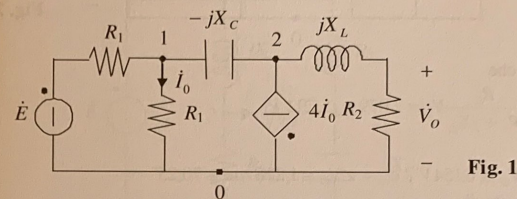


Fig. 1

Al fine di applicare l'analisi nodale per risolvere il circuito assegnato è opportuno:

- trasformare il generatore reale di tensione nell'equivalente Norton;
- osservare che sia la grandezza pilota i_0 che la tensione da determinare $\dot{V}_o$ possono essere espresse in funzione delle tensioni di nodo; in particolare, scelto (cfr. Fig. 1) il nodo 0 come nodo di riferimento in modo che $\dot{V}_1 \equiv \dot{V}_{10}$, $\dot{V}_2 \equiv \dot{V}_{20}$, risulta:

$$i_0 \equiv \frac{\dot{V}_1}{R_1}, \quad \dot{V}_o \equiv \frac{R_2}{R_2 + jX_L} \dot{V}_2$$

Applicando pertanto il metodo delle tensioni di nodo al circuito di Fig. 2 si ha che:

$$\begin{cases} \frac{\dot{E}}{R_1} = \dot{V}_1 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{-jX_C} \right) - \dot{V}_2 \left(\frac{1}{-jX_C} \right) \\ -\frac{4\dot{V}_1}{R_1} = \dot{V}_2 \left(\frac{1}{-jX_C} + \frac{1}{R_2 + jX_L} \right) - \dot{V}_1 \left(\frac{1}{-jX_C} \right) \end{cases}$$

Il sistema può essere riscritto come

$$\begin{cases} (2 + j)\dot{V}_1 - j\dot{V}_2 = 10 \\ (-20 + j5)\dot{V}_1 - (3 + j4)\dot{V}_2 = 0 \end{cases}$$

da cui

$$\dot{V}_2 = 0,149 + j6,485 \text{ V}$$

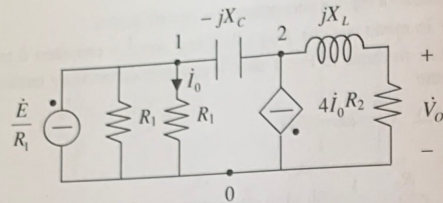


Fig. 2

Ne segue che

$$\dot{V}_0 = \frac{R_2}{R_2 + jX_L} \dot{V}_2 = 2,079 + j5,792 \text{ V}$$

da cui

$$V_0 \approx \dot{V}_0 \approx 6,154 \text{ V}, \quad \varphi_0 = \angle \dot{V}_0 \approx 1,226 \text{ rad} \approx 70,25^\circ$$

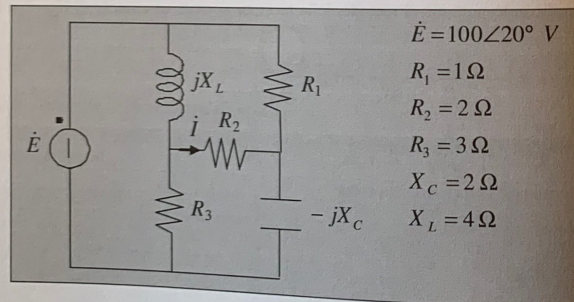
Si ha pertanto che

$$v_0(t) = \text{Re}[\dot{V}_0 \exp(j\omega t)] = 6,154 \cos(10^3 t + 1,226) \text{ V}.$$



2.1.4 – Metodo delle tensioni di nodo

Utilizzando il metodo delle tensioni di nodo determinare la corrente i nel circuito mostrato in figura.



$$\dot{E} = 100 \angle 20^\circ \text{ V}$$

$$R_1 = 1 \Omega$$

$$R_2 = 2 \Omega$$

$$R_3 = 3 \Omega$$

$$X_C = 2 \Omega$$

$$X_L = 4 \Omega$$

Nel circuito assegnato è presente un generatore ideale di tensione. Con riferimento alla Fig. 1, assumendo come nodo di riferimento il nodo 0, si ha che per risolvere il circuito è sufficiente scrivere le equazioni ai nodi 2, 3 essendo nota la

tensione $\dot{V}_1 = \dot{E}$. In particolare, la corrente da determinare può essere espressa in funzione delle tensioni di nodo $\dot{V}_2, \dot{V}_3$:

$$i = \frac{\dot{V}_2 - \dot{V}_3}{R_2}.$$

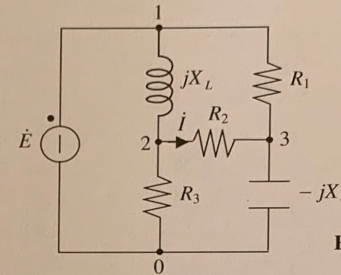


Fig. 1

Vale il seguente sistema di equazioni

$$\begin{cases} 0 = \dot{V}_2 [1/R_2 + 1/R_3 + 1/(jX_L)] - \dot{V}_1 [1/(jX_L)] - \dot{V}_3 [1/R_2] & \text{nodo 2} \\ 0 = \dot{V}_3 [1/R_1 + 1/R_2 + 1/(-jX_C)] - \dot{V}_1 [1/R_1] - \dot{V}_2 [1/R_2] & \text{nodo 3} \\ \dot{V}_1 = \dot{E} \end{cases}$$

da cui si ottiene il sistema

$$\begin{cases} (10 - j3) \dot{V}_2 - 6 \dot{V}_3 = -j3 \dot{E} \\ -\dot{V}_2 + (3 + j) \dot{V}_3 = 2 \dot{E} \end{cases}$$

risolto da

$$\dot{V}_2 = \frac{15 - j9}{27 + j} \dot{E} = (0,542 - j0,353) \dot{E} = 63 - j14,634 \text{ V}$$

$$\dot{V}_3 = \frac{20 - j9}{27 + j} \dot{E} = (0,727 - j0,36) \dot{E} = 80,63 - j8,96 \text{ V}.$$

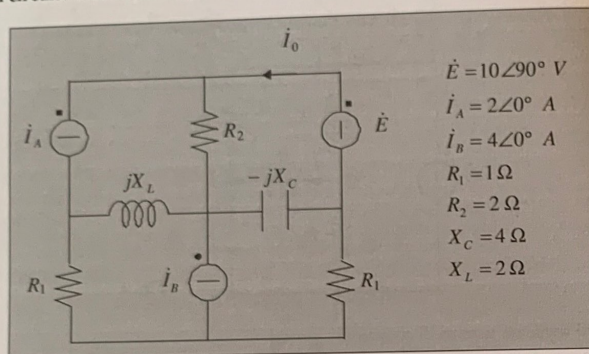
Ne segue che

$$i = \frac{\dot{V}_2 - \dot{V}_3}{R_2} = -8,812 - j2,835 = 9,257 \exp(-j162,167^\circ) \text{ A}.$$



2.2.5 - Metodo delle correnti di maglia

Utilizzando il metodo delle correnti di maglia determinare la corrente i_0 nel circuito mostrato in figura.



Il grafo associato al circuito presenta $l=8$ lati, $n=5$ nodi ed ha quindi $l_a = n-1 = 4$ lati d'albero e $l_c = l - l_a = 4$ corde. La suddivisione dei lati del grafo in lati d'albero e corde mostrata in Fig. 1 è tale che delle 4 correnti di maglia monocorda 2 sono note (i_A, i_B) in quanto i generatori di corrente appartengono proprio alle corde 3,0 e 2,1 (cfr. Fig. 2).

Con tale scelta è quindi sufficiente scrivere un sistema di 2 equazioni di maglia nelle incognite i_0, i_1 .

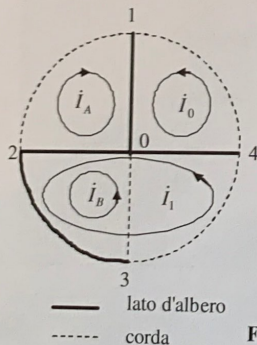


Fig. 1

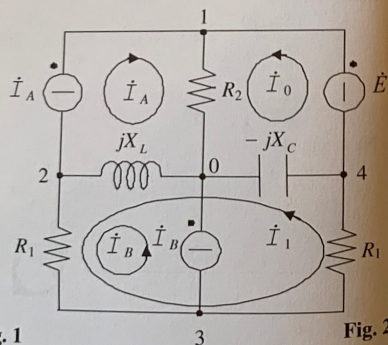


Fig. 2

Con riferimento alla Fig. 2 le equazioni per le maglie monocorda percorse dalle correnti i_0, i_1 risultano

$$\begin{cases} \dot{E} = (R_2 - jX_C)\dot{i}_0 + R_2\dot{i}_A - (-jX_C)\dot{i}_1 & \text{maglia } i_0 \\ 0 = (-jX_C + jX_L + R_1 + R_1)\dot{i}_1 - (-jX_C)\dot{i}_0 + jX_L\dot{i}_A + (jX_L + R_1)\dot{i}_B & \text{maglia } i_1 \end{cases}$$

Il sistema può essere riscritto come

$$\begin{cases} (2 - j4)\dot{i}_0 + j4\dot{i}_1 = -4 + j10 \\ j4\dot{i}_0 + (2 - j2)\dot{i}_1 = -4 - j12 \end{cases}$$

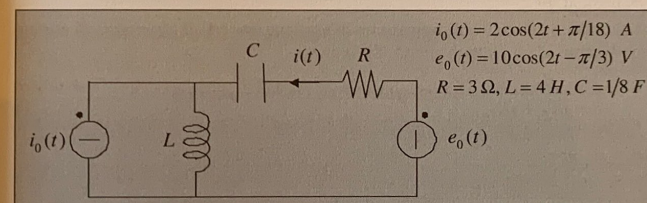
da cui si ottiene

$$\dot{i}_0 = 3,35 \exp(j174,3^\circ) \text{ A.}$$



2.2.6 - Principio di sovrapposizione degli effetti

Determinare la corrente i nel circuito mostrato in figura applicando il principio di sovrapposizione degli effetti.



Nel circuito agiscono due generatori sinusoidali di pulsazione $\omega = 2 \text{ rad/s}$. Posto

$$\dot{i}_0 = 2 \exp(j\pi/18) \text{ A}, \dot{E}_0 = 10 \exp(-j\pi/3) \text{ V}$$

in modo tale che

$$i_0(t) = \text{Re}\{\dot{i}_0 \exp(j\omega t)\}, e_0(t) = \text{Re}\{\dot{E}_0 \exp(j\omega t)\}$$

si considera il circuito per l'analisi fasoriale mostrato in Fig. 1 dove

$$X_C = 1/(\omega C) = 4 \Omega, X_L = \omega L = 8 \Omega.$$

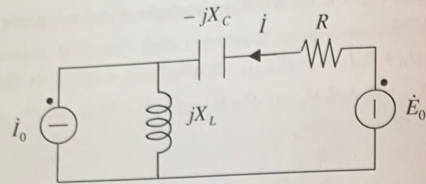


Fig. 1

Applicando il principio di sovrapposizione degli effetti si ha che $\dot{i} = \dot{i}' + \dot{i}''$ avendo indicato con $\dot{i}'$, $\dot{i}''$ il contributo alla corrente $\dot{i}$ dovuto rispettivamente al generatore di corrente ed al generatore di tensione.

Calcolo di $\dot{i}'$

Nel circuito di Fig. 1 agisce solo i_0 mentre il generatore di tensione è equivalente ad un corto circuito. Per la regola del partitore di corrente si ha che

$$\dot{i}' = -\frac{jX_L}{R - jX_C + jX_L} \dot{i}_0 = 3,2 \exp(-j133,13^\circ) = -2,188 - j2,335 \text{ A}$$

Calcolo di $\dot{i}''$

Nel circuito agisce il solo generatore di tensione essendo il generatore di corrente equivalente ad un circuito aperto. Si ha che

$$\dot{i}'' = \frac{\dot{E}_0}{R - jX_C + jX_L} = 2 \exp(-j113,13^\circ) = -0,786 - j1,839 \text{ A}$$

Calcolo di $\dot{i}$

Il fasore della corrente $i(t)$ risulta

$$\dot{i} = \dot{i}' + \dot{i}'' = -2,973 - j4,175 \equiv 5,125 \exp(-j125,46^\circ) \equiv 5,125 \exp(-j2,19) \text{ A}$$

da cui segue che

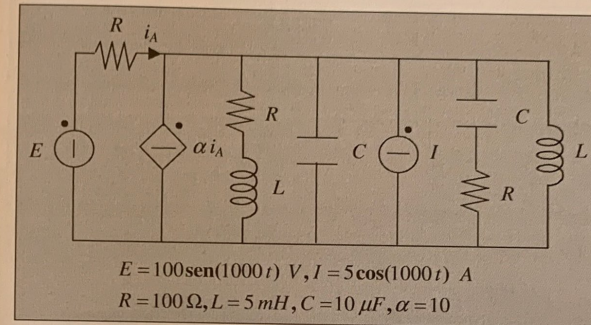
$$i(t) = \operatorname{Re}\{\dot{i} \exp(j\omega t)\} = 5,125 \cos(2t - 2,19) \text{ A.}$$



2.3 SEZIONE C – ESERCIZI DA SVOLGERE

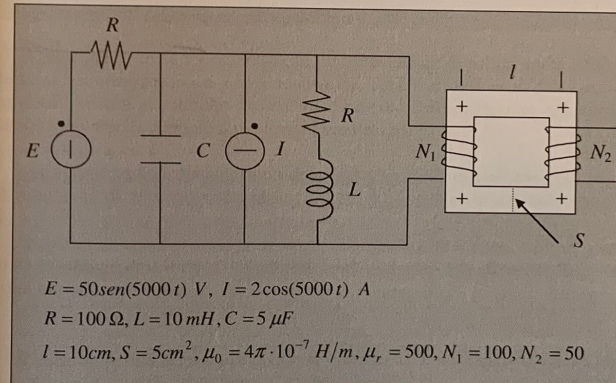
2.3.1 – Calcolo della potenza attiva e reattiva erogata da un generatore

Considerando il circuito a regime determinare la potenza attiva e reattiva erogata dal generatore I .



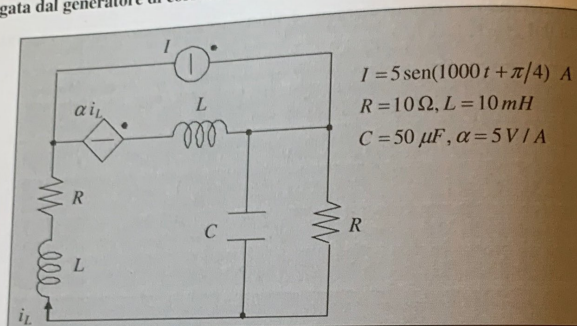
2.3.2 – Calcolo dell'energia elettromagnetica media

Considerando il circuito a regime determinare l'energia elettromagnetica media nell'elettromagnete di figura.



2.3.3 – Calcolo della potenza attiva

Il circuito di figura si intende a regime. Determinare la potenza attiva erogata dal generatore di corrente.



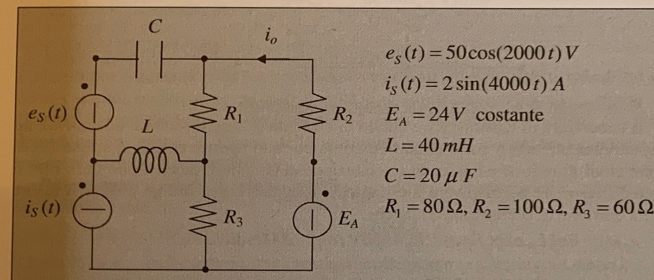
Capitolo 3

CIRCUITI A REGIME PERIODICO NON SINUSOIDALE

3.1 SEZIONE A – ESERCIZI SVOLTI

3.1.1 – Sovrapposizione degli effetti

Determinare la corrente i_o nel circuito mostrato in figura utilizzando il principio di sovrapposizione degli effetti.



Il principio di sovrapposizione degli effetti permette di valutare una o più grandezze di un circuito lineare come somma dei contributi dovuti ai generatori indipendenti presenti nel circuito stesso. Nel caso considerato, facendo agire un generatore alla volta, la corrente i_o può essere valutata come

$$i_o = i_{o1} + i_{o2} + i_{o3},$$

ossia come somma dei contributi dovuti al generatore di tensione costante (i_{o1}), al generatore di tensione sinusoidale (i_{o2}) ed al generatore di corrente sinusoidale (i_{o3}).

Supponendo che il circuito si trovi nella condizione di regime, ciascun contributo ha la stessa forma d'onda del generatore che, corrispondentemente, è di volta in volta attivo.

Valutazione di i_{o1} – contributo dovuto al generatore E_A

Il generatore di tensione e_S e quello di corrente i_S sono disattivati ed equivalenti rispettivamente ad un corto circuito e ad un circuito aperto; poiché si valuta i_{o1} in condizioni di regime, il condensatore è equivalente ad un circuito aperto, mentre l'induttore ad un corto circuito. Tenendo conto di ciò, il circuito per il calcolo di i_{o1}

può essere ridisegnato come in Fig. 1. Osservando che la corrente da determinare scorre nella maglia comprendente il generatore E_A ed i tre resistori, si ha che, per il principio di Kirchhoff applicato a tale maglia,

$$i_{01} = \frac{E_A}{R_1 + R_2 + R_3} = 0,1 \text{ A.}$$

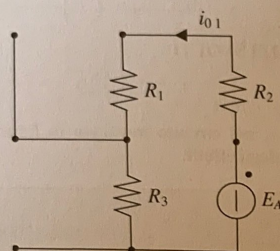


Fig. 1

Valutazione di i_{02} - contributo dovuto al generatore e_s

Il generatore di tensione E_A e quello di corrente i_s sono disattivati ed equivalenti rispettivamente ad un corto circuito e ad un circuito aperto; poiché si valuta i_{02} in condizioni di regime ed essendo l'eccitazione $e_s(t)$ sinusoidale, si può utilizzare il metodo fasoriale per risolvere il circuito, ridisegnato come in Fig. 2 dove il fasore della tensione di eccitazione è tale che

$$e_s(t) = \text{Re}\{\dot{E}_s \exp(j\omega_s t)\}, \dot{E}_s = 50 \text{ V}, \omega_s = 2000 \text{ rad/s.}$$

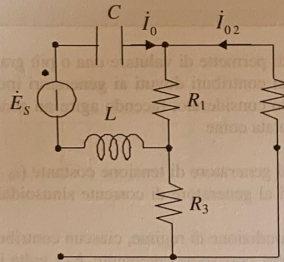


Fig. 2

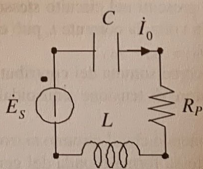


Fig. 3

Tenendo conto che i resistori R_1 e $(R_2 + R_3)$ sono, in tale circuito, in parallelo ed applicando la regola del partitore di corrente si ha che

$$i_{02} = -\frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_3} i_0 = -\frac{1}{3} i_0.$$

Considerato quindi il circuito equivalente per il calcolo di i_0 mostrato in Fig. 3, dove

$$R_p = \frac{R_1(R_2 + R_3)}{R_1 + (R_2 + R_3)} = \frac{160}{3} \Omega,$$

si ha che

$$\dot{i}_0 = \frac{\dot{E}_s}{(1/j\omega_s C) + R_p + j\omega_s L} = \frac{150}{160 + j165} \text{ A}$$

da cui

$$\begin{aligned} \dot{i}_{02} &= -\frac{1}{3} \frac{150}{160 + j165} = \\ &= \frac{50}{\sqrt{160^2 + 165^2}} \exp\{j[\pi - \arctg(165/160)]\} \approx 0,218 \exp(j2,34) \text{ A} \end{aligned}$$

Tenendo conto di come è stato definito il fasore di ingresso, si ha che

$$i_{02}(t) = \text{Re}\{\dot{i}_{02} \exp(j\omega_s t)\} = 0,218 \cos(2000t + 2,34) \text{ A}$$

Valutazione di i_{03} - contributo dovuto al generatore i_s

Entrambi i generatori di tensione sono disattivati ed equivalenti quindi ad un corto circuito; anche in questo caso, poiché si valuta i_{03} in condizioni di regime ed essendo l'eccitazione $i_s(t)$ sinusoidale, si può utilizzare il metodo fasoriale determinando prima il fasore della corrente e successivamente l'espressione temporale della corrente stessa.

Ridisegnato il circuito come in Fig. 4, dove il fasore della corrente di eccitazione è tale che

$$i_s(t) = \text{Im}\{\dot{I}_s \exp(j\omega_s t)\}, \dot{I}_s = 2 \text{ A}, \omega_s = 4000 \text{ rad/s,}$$

il calcolo di $\dot{I}_{03}$ può essere eseguito sostituendo al collegamento a stella tra i nodi 0, 1, 2, 3 il collegamento equivalente a triangolo ed applicando in successione la regola del partitore di corrente nel circuito equivalente di Fig. 5.

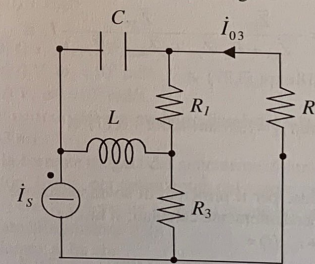


Fig. 4

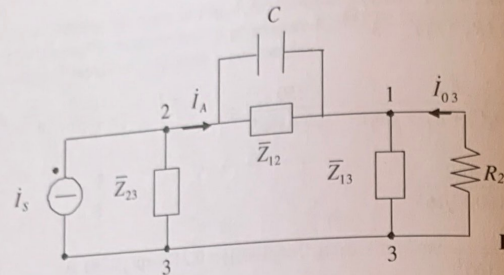


Fig. 5

Per l'equivalenza stella - triangolo deve essere

$$\bar{Z}_{12} = \frac{R_1(j\omega_3 L) + R_1 R_3 + R_3(j\omega_3 L)}{R_3} \approx 80 + j373,333 \, \Omega$$

$$\bar{Z}_{23} = \frac{R_3}{R_1} \bar{Z}_{12} = 60 + j280 \, \Omega$$

$$\bar{Z}_{13} = \frac{R_3}{j\omega_3 L} \bar{Z}_{12} = 140 - j30 \, \Omega$$

Definendo le impedenze parallelo

$$Z_{p21} = \frac{[1/(j\omega_3 C)] \cdot \bar{Z}_{12}}{[1/(j\omega_3 C)] + \bar{Z}_{12}} \approx 0,092 - j12,913 \, \Omega,$$

$$Z_{p13} = \frac{R_2 \cdot \bar{Z}_{13}}{R_2 + \bar{Z}_{13}} \approx 58,974 - j5,128 \, \Omega,$$

ed applicando la regola del partitore di corrente rispettivamente ai nodi 1, 2 si ha che

$$\begin{aligned} i_{03} &= -\frac{\bar{Z}_{13}}{\bar{Z}_{13} + R_2} i_A = -\frac{\bar{Z}_{13}}{\bar{Z}_{13} + R_2} \frac{\bar{Z}_{23}}{(\bar{Z}_{23} + \bar{Z}_{p21} + \bar{Z}_{p13})} i_s \approx \\ &\approx -1,168 - j0,151 \approx 1,18 \exp(j3,27) \, A \end{aligned}$$

Ne segue che

$$i_{03}(t) = \operatorname{Im}\{I_{03} \exp(j\omega_3 t)\} = 1,18 \sin(4000t + 3,27) \, A$$

Valutazione di i_0

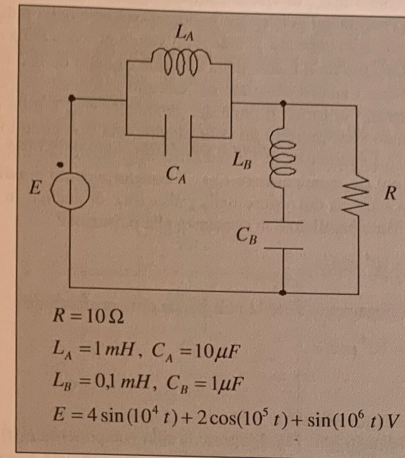
La corrente i_0 è valutata, per il principio di sovrapposizione degli effetti, come somma dei contributi precedentemente calcolati; si ha che

$$\begin{aligned} i_0(t) &= i_{01}(t) + i_{02}(t) + i_{03}(t) = \\ &= [0,1 + 0,218 \cos(2000t + 2,34) + 1,18 \sin(4000t + 3,27)] \, A \end{aligned}$$



3.1.2 - Potenza attiva erogata da un generatore, effetto filtrante

Considerando il circuito a regime determinare la potenza attiva erogata dal generatore di tensione E .



$$R = 10 \, \Omega$$

$$L_A = 1 \, \text{mH}, \quad C_A = 10 \, \mu\text{F}$$

$$L_B = 0,1 \, \text{mH}, \quad C_B = 1 \, \mu\text{F}$$

$$E = 4 \sin(10^4 t) + 2 \cos(10^5 t) + \sin(10^6 t) \, \text{V}$$

Il circuito è caratterizzato da un regime periodico non sinusoidale; la forma d'onda del generatore di tensione è infatti somma di tre oscillazioni sinusoidali di frequenza diversa. In particolare, si ha che

$$E(t) = E_1(t) + E_2(t) + E_3(t)$$

dove

$$E_1(t) = 4 \sin(\omega_1 t) \, \text{V}, \quad \omega_1 = 10^4 \, \text{rad/s},$$

$$E_2(t) = 2 \cos(\omega_2 t) \, \text{V}, \quad \omega_2 = 10^5 \, \text{rad/s},$$

$$E_3(t) = \sin(\omega_3 t) \, \text{V}, \quad \omega_3 = 10^6 \, \text{rad/s}.$$

In questo caso il periodo del regime periodico è dato da

$$T = 2\pi/\omega_1 = 0,63 \, \text{ms}.$$

Indicando con $i(t)$ la corrente erogata dal generatore di tensione, la potenza attiva P erogata dal generatore è data, per definizione, dal valore medio temporale della potenza $p(t) = E(t) \cdot i(t)$ che il generatore eroga istantaneamente, avendo scelto per $i(t)$ il verso non associato alla tensione $E(t)$.

Nel caso considerato, si ha che

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = P_1 + P_2 + P_3$$

dove

$$P_n = E_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \phi_n, \quad n = 1, 2, 3.$$

In particolare, i termini di potenza attiva P_n possono essere valutati, così come di seguito mostrato, eseguendo l'analisi fasoriale del circuito assegnato per ciascuna delle tre pulsazioni ω_n , $n = 1, 2, 3$ definite. Facendo infatti agire la sola componente di tensione $E_n(t)$, di valore efficace $E_{n\text{eff}}$, si determina il fasore associato alla corrente erogata dal generatore in corrispondenza della pulsazione considerata; noto il fasore della corrente, si calcola il valore efficace della corrente $I_{n\text{eff}}$ e l'angolo ϕ_n di sfasamento tra il fasore della tensione e quello della corrente.

Prima di effettuare l'analisi fasoriale del circuito assegnato per ciascuna delle pulsazioni che formano la forma d'onda del generatore $E(t)$ è utile osservare che nel circuito assegnato sono presenti un collegamento del tipo circuito risonante parallelo (induttore L_A , condensatore C_A) ed un collegamento del tipo circuito risonante serie (induttore L_B , condensatore C_B). Il comportamento di tali collegamenti di bipoli cambia a seconda del valore della pulsazione di analisi. In particolare, il collegamento risonante parallelo è in risonanza alla pulsazione

$$\omega_A = \frac{1}{\sqrt{L_A C_A}} = 10^4 \text{ rad/s},$$

mentre per il collegamento serie la pulsazione di risonanza vale

$$\omega_B = \frac{1}{\sqrt{L_B C_B}} = 10^5 \text{ rad/s}.$$

Calcolo della potenza attiva P_1

Nel circuito assegnato (cfr. Fig. 1) agisce la sola componente $E_1(t)$ di pulsazione ω_1 ; poiché $\omega_1 \equiv \omega_A$ si ha che il collegamento risonante parallelo è in risonanza ed è quindi equivalente ad un circuito aperto; il calcolo di P_1 può pertanto essere effettuato considerando il circuito equivalente mostrato in Fig. 1 da cui risulta immediatamente che $P_1 = 0$ essendo $I_1 = 0$.

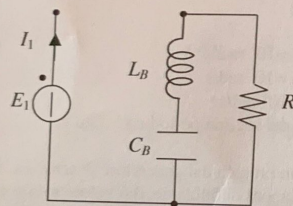


Fig. 1

Calcolo della potenza attiva P_2

Nel circuito assegnato agisce la sola componente $E_2(t)$ di pulsazione ω_2 . In questo caso è il circuito risonante serie ad essere in risonanza, in quanto $\omega_2 \equiv \omega_B$; ne segue che il calcolo della potenza attiva P_2 può essere effettuato considerando il circuito equivalente mostrato in Fig. 2. In tale circuito si è tenuto conto del fatto che in condizioni di risonanza il collegamento risonante serie L_B, C_B è equivalente

ad un cortocircuito e che il parallelo tra il resistore R ed il resistore nullo costituito dal cortocircuito è equivalente ad un resistore ancora di valore nullo.

Il circuito di Fig. 2 è un circuito puramente reattivo; in particolare, tale è l'impedenza vista dal generatore E_2 . Ne segue che i fasori della tensione e quello della corrente I_2 sono sfasati di un angolo ϕ_2 tale che $|\phi_2| = \pi/2$ (l'angolo vale $\phi_2 = -\pi/2$: il collegamento risonante parallelo di Fig. 2 ha infatti un comportamento capacitivo essendo la pulsazione di analisi ω_2 maggiore della pulsazione ω_A di risonanza del collegamento stesso).

Come nel caso precedentemente analizzato, la potenza attiva erogata dal generatore associata alla pulsazione considerata è nulla:

$$P_2 = E_{2\text{eff}} I_{2\text{eff}} \cos(-\pi/2) = 0.$$

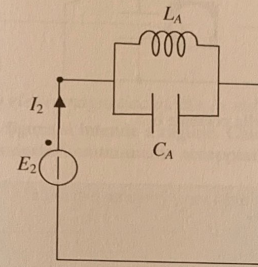


Fig. 2

Calcolo della potenza attiva P_3

La pulsazione di analisi è $\omega_3 > \omega_B > \omega_A$, dove ω_A, ω_B sono le pulsazioni di risonanza precedentemente calcolate; ne segue che né il collegamento risonante serie né quello parallelo sono in risonanza ma hanno rispettivamente l'uno un comportamento di tipo induttivo, l'altro di tipo capacitivo; il circuito da considerare è pertanto quello mostrato in Fig. 3 dove il fasore associato al generatore di tensione $E_3(t)$ di valore efficace $E_{3\text{eff}} = 1/\sqrt{2} \text{ V}$ è tale che

$$E_3(t) = \text{Im}\{\dot{E}_3 \exp(j\omega_3 t)\}, \quad \dot{E}_3 = 1 \text{ V}.$$

Posto

$$\bar{Z}_A = \frac{(1/j\omega_3 C_A)(j\omega_3 L_A)}{(1/j\omega_3 C_A) + (j\omega_3 L_A)} = j \frac{\omega_3 L_A}{1 - \omega_3^2 L_A C_A} = j \frac{\omega_3 L_A}{1 - (\omega_3/\omega_A)^2} \approx -j0,1 \Omega$$

$$\bar{Z}_B = j\omega_3 L_B + \frac{1}{j\omega_3 C_B} = \frac{1 - \omega_3^2 L_B C_B}{j\omega_3 C_B} = \frac{1 - (\omega_3/\omega_B)^2}{j\omega_3 C_B} = j99 \Omega$$

$$\bar{Z}_P = \frac{R \bar{Z}_B}{R + \bar{Z}_B} = \frac{j99}{1 + j9,9} \approx 9,95 \exp(+j0,1) \approx 9,9 + j \Omega$$

si ha che

$$i_3 = \frac{\dot{E}_3}{\bar{Z}_A + \bar{Z}_P} = \frac{1}{-j0,1 + 9,9 + j} = \frac{1}{9,9 + j0,9} \approx 0,1 \exp(-j0,091) \text{ A}.$$

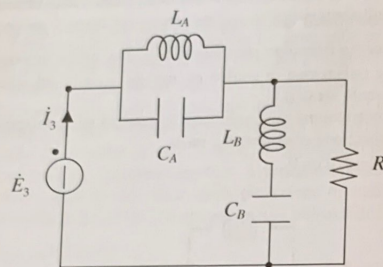


Fig. 3

Ne segue che il valore efficace della corrente è

$$I_{3\text{eff}} = \frac{|\dot{I}_3|}{\sqrt{2}} \approx 0,07 \text{ A}$$

mentre l'angolo di sfasamento tra tensione e corrente è dato da

$$\phi_3 = \angle E_3 - \angle I_3 \approx 0,091 \approx 5,2^\circ.$$

In definitiva, si ha che

$$P_3 = E_{3\text{eff}} I_{3\text{eff}} \cos \phi_3 \approx 50 \text{ mW}$$

Calcolo della potenza attiva P

Tenendo conto dei risultati precedentemente ottenuti si ha che

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = P_3 \approx 50 \text{ mW}$$

Approfondimento

Il circuito assegnato, come ogni circuito contenente elementi reattivi, presenta proprietà filtranti ovvero ha un comportamento o, per meglio dire, una risposta che cambia al variare della frequenza del segnale di ingresso. In particolare, nel caso considerato, assumendo come uscita del circuito la tensione ai capi del resistore R (cfr. circuito assegnato), si ha che delle tre componenti di segnale presenti in $E(t)$ solo quella di pulsazione maggiore ($E_3(t)$) dà contributo al segnale $v_R(t)$. In base all'analisi precedentemente effettuata si ha infatti che la componente di segnale di ingresso $E_1(t)$ è "bloccata" dal collegamento risonante parallelo L_A, C_A in risonanza per $\omega_1 = \omega_1$. La componente $E_2(t)$, di pulsazione ω_2 , non ha effetto su $v_R(t)$ perché il collegamento risonante serie L_B, C_B , posto in parallelo ad R , è in risonanza ($\omega_2 = \omega_2$) e quindi "dirotta" o (come si può trovare indicato dall'inglese) "shunta" tutta la corrente di frequenza f_2 nel proprio ramo annullando $v_R(t)$ a quella frequenza. La componente di segnale di ingresso $E_3(t)$, infine, risulta invece trasferita su v_R senza essere, in prima approssimazione, né attenuata né sfasata. Considerato il

circuito di Fig. 3, si ha infatti che il fasore della tensione $v_R(t)$ associato alla oscillazione di pulsazione ω_3 risulta essere (cfr. calcolo della potenza attiva P_3)

$$\dot{V}_{R3} = \frac{\bar{Z}_P}{\bar{Z}_A + \bar{Z}_P} \dot{E}_3 \approx 1 \cdot \exp(j0,01) \approx 1 \cdot \exp(j0,574^\circ) \text{ V}.$$

In definitiva, si ha che

$$v_R(t) = \text{Im}\{\dot{V}_{R3} \exp(j\omega_3 t)\} \approx \sin(\omega_3 t + 0,01) \text{ A}.$$

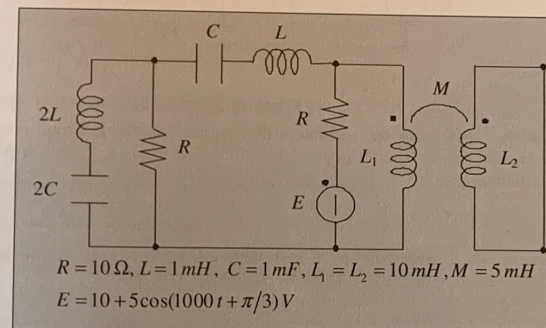
Confrontando la forma d'onda della tensione ai capi del resistore (segnale di uscita) con la componente di segnale di ingresso $E_3(t)$ può ritenersi, in prima approssimazione,

$$v_R(t) \approx E_3(t).$$



3.1.3 – Energia elettromagnetica media in induttori mutuamente accoppiati

Il circuito di figura si intende a regime. Calcolare l'energia elettromagnetica media negli induttori mutuamente accoppiati.



Poiché la forma d'onda associata al generatore di tensione E è somma di una componente costante di valore $E_0 = 10 \text{ V}$ e di una componente sinusoidale $E_1(t) = 5\cos(1000t + \pi/3) \text{ V}$, il calcolo dell'energia elettromagnetica media W negli induttori mutuamente accoppiati deve essere effettuato facendo agire separatamen-

te le due componenti, valutando l'energia media associata a ciascuna delle due componenti (W_0, W_1) e sommando, infine, i risultati ottenuti ($W = W_0 + W_1$)⁽¹⁾.

Calcolo di W_0

Nel circuito agisce la componente costante E_0 ; poiché il circuito è per ipotesi a regime, il calcolo delle correnti negli induttori accoppiati può essere effettuato considerando il circuito equivalente mostrato in Fig. 1, avendo sostituito agli induttori ed ai condensatori del circuito assegnato rispettivamente dei cortocircuiti e dei circuiti aperti.

Si ha che $I_{1C} = E_0/R = 1$ A mentre la corrente I_{2C} risulta indeterminata; assumendo, per motivi fisici, $I_{2C} = 0$, la componente di energia W_0 è data da

$$W_0 = \frac{1}{2} L_1 I_{1C}^2 = 5 \text{ mJ}.$$

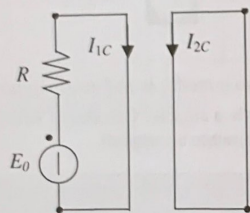


Fig. 1

Calcolo di W_1

Nel circuito assegnato (cfr. Fig. 1) agisce la componente sinusoidale $E_1(t)$ di pulsazione $\omega_1 = 1000 \text{ rad/s}$ del generatore di tensione. Nel circuito sono presenti due collegamenti risonanti serie; in particolare, il collegamento L, C ha una pulsazione di risonanza pari a

$$\omega_A = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 1000 \text{ rad/s}$$

e risulta quindi in risonanza ($\omega_A \equiv \omega_1$), mentre il collegamento $2L, 2C$ ha un comportamento di tipo induttivo essendo la pulsazione di risonanza

$$\omega_B = \frac{1}{\sqrt{2L \cdot 2C}} = 500 \text{ rad/s}$$

minore della pulsazione di analisi ω_1 .

Il calcolo dell'energia media si effettua eseguendo l'analisi fasoriale con il fine di determinare la corrente negli induttori mutuamente accoppiati.

Scelto il fasore della tensione $E_1(t)$ in modo tale che

$$E_1(t) = \text{Re}[\dot{E}_1 \exp(j\omega_1 t)], \dot{E}_1 = 5 \exp(j\pi/3) \text{ V},$$

⁽¹⁾ Più in generale, il calcolo dei singoli contributi di energia W_i ($i = 0, 1, \dots, N$) deve essere effettuato facendo agire simultaneamente tutte le componenti di frequenza f_i associate ai generatori presenti nel circuito assegnato.

si considera il circuito equivalente di Fig. 2. Tale circuito è ottenuto dal circuito assegnato sostituendo al collegamento serie L, C (in risonanza alla pulsazione di analisi) un corto circuito.

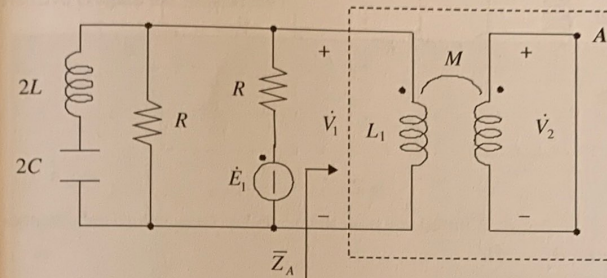


Fig. 2

Tenendo conto dei riferimenti scelti per le correnti e del fatto che $V_2 = 0$, per gli induttori accoppiati vale il seguente sistema di equazioni

$$\begin{cases} \dot{V}_1 = j\omega_1 L_1 \dot{I}_1 + j\omega_1 M \dot{I}_2 \\ 0 = j\omega_1 M \dot{I}_1 + j\omega_1 L_2 \dot{I}_2 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ha che

$$\dot{I}_2 = -\frac{M}{L_2} \dot{I}_1 = -0,5 \dot{I}_1,$$

mentre dalla prima equazione ne segue che

$$\dot{V}_1 = j\omega_1 \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_2} \dot{I}_1 = j\omega_1 L_A \dot{I}_1$$

avendo definito

$$L_A = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_2} = 7,5 \text{ mH}.$$

Il bipolo racchiuso dal rettangolo tratteggiato A (cfr. Fig. 2) è pertanto equivalente all'impedenza induttiva

$$\bar{Z}_A = \frac{\dot{V}_1}{\dot{I}_1} = j\omega_1 L_A = j7,5 \Omega.$$

Tenendo conto di ciò e sostituendo al ramo comprendente il generatore di tensione in serie con il resistore R il suo equivalente di Norton, il circuito di Fig. 2 può essere ridisegnato come in Fig. 3. Tale circuito permette di calcolare direttamente la corrente $\dot{I}_1$.

Per la regola del partitore di corrente, si ha infatti che

$$\dot{I}_1 = \frac{\bar{Z}_B}{\bar{Z}_A + \bar{Z}_B} \frac{\dot{E}_1}{R}$$

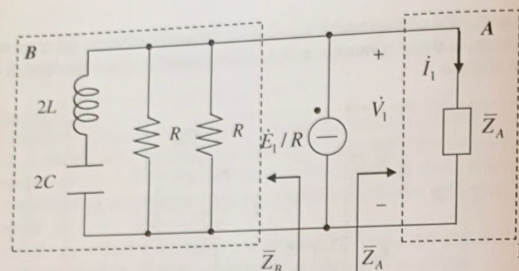


Fig. 3

avendo definito con $\bar{Z}_B$ l'impedenza equivalente del bipolo racchiuso dal rettangolo tratteggiato B.

Numericamente, posto

$$\bar{Z}_{LC} = j\omega_1 2L + 1/(j\omega_1 2C) = j1,5 \Omega,$$

si ha che

$$\bar{Z}_B = \frac{(R/2) \cdot \bar{Z}_{LC}}{(R/2) + \bar{Z}_{LC}} = \frac{j1,5}{10 + j3} \Omega$$

da cui segue che

$$\dot{I}_1 = \frac{1}{3(4+j)} \exp(j\pi/3) = \frac{1}{3\sqrt{17}} \exp\{j[\pi/3 - \arctg(1/4)]\} = 0,08 \exp(j0,8) \text{ A}$$

e quindi

$$\dot{I}_2 = -0,5 \dot{I}_1 = 0,04 \exp[j(0,8 + \pi)]$$

Risultano pertanto determinati i valori efficaci delle correnti negli induttori e l'angolo di sfasamento tra le correnti stesse; si ha

$$I_{1\text{eff}} = \frac{|\dot{I}_1|}{\sqrt{2}} = \frac{0,08}{\sqrt{2}} = 0,057 \text{ A},$$

$$I_{2\text{eff}} = \frac{|\dot{I}_2|}{\sqrt{2}} = \frac{0,04}{\sqrt{2}} = 0,0285 \text{ A},$$

$$\phi_{12} = \angle \dot{I}_1 - \angle \dot{I}_2 = -\pi.$$

L'energia elettromagnetica vale quindi

$$W_1 = \frac{1}{2} L_1 I_{1\text{eff}}^2 + \frac{1}{2} L_2 I_{2\text{eff}}^2 + M I_{1\text{eff}} I_{2\text{eff}} \cos \phi_{12} = 12 \mu \text{ J}.$$

Calcolo di W

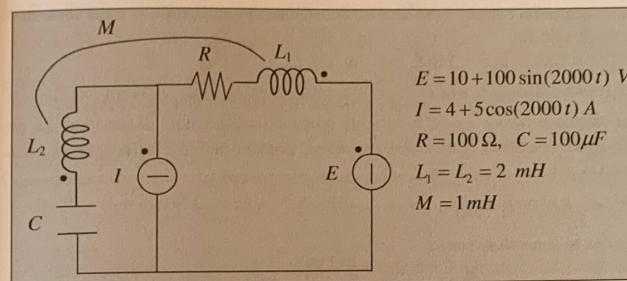
L'energia elettromagnetica media complessiva negli induttori accoppiati vale

$$W = W_0 + W_1 = 5,012 \text{ mJ}.$$



3.1.4 - Metodo del tableau

Considerando il circuito di figura a regime determinare la potenza attiva e reattiva erogata dal generatore E.



Nel circuito agiscono generatori con componente continua e con componente sinusoidale di pulsazione $\omega_1 = 2000 \text{ rad/s}$. La potenza attiva e la potenza reattiva erogata dal generatore E sono pertanto date, rispettivamente, da

$$P = P_0 + P_1, \quad Q = Q_1$$

dove P_0 è la potenza attiva erogata in continua quando nel circuito agiscono le componenti continue dei generatori, mentre P_1, Q_1 sono le potenze attive e reattive calcolate quando nel circuito agiscono le componenti sinusoidali dei generatori.

Calcolo di P_0

Il circuito per il calcolo di P_0 è mostrato in Fig. 1; il circuito, agendo la sola componente continua dei generatori, tiene conto del fatto che gli induttori accoppiati ed il condensatore presenti nel circuito assegnato sono equivalenti rispettivamente a dei corto circuiti e ad un circuito aperto. Si ha che

$$P_0 = E_0 I_{E0} = E_0 (-I_0) = -40 \text{ W}.$$

Da notare che il generatore di corrente nel circuito di Fig. 1 fornisce una potenza di 1640 W in parte dissipata su R ($RI_0^2, 1600 \text{ W}$) in parte assorbita da E_0 ($-P_0, 40 \text{ W}$).

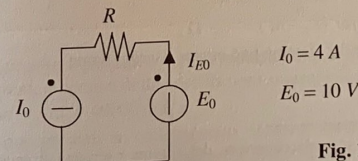


Fig. 1

Calcolo di P_1, Q_1

Il calcolo di P_1, Q_1 viene effettuato considerando la componente sinusoidale di entrambi i generatori anche se si è interessati a calcolare le potenze associate al solo generatore di tensione.

Considerato il circuito per l'analisi sinusoidale di Fig. 2, dove i fasori sono scelti in modo tale che

$$E_1(t) = 100 \sin(\omega_1 t) = \text{Im}\{\dot{E}_1 \exp(j\omega_1 t)\}, \dot{E}_1 = 100 \text{ V},$$

$$I_1(t) = 5 \cos(\omega_1 t) = 5 \sin(\omega_1 t + \pi/2) = \text{Im}\{\dot{I}_1 \exp(j\omega_1 t)\}, \dot{I}_1 = 5 \exp(j\pi/2) \text{ A},$$

si calcola il fasore $\dot{I}_E$ della corrente erogata dal generatore di tensione. La potenza attiva e reattiva erogate dal generatore possono infatti essere ricavate conoscendo la potenza complessa

$$\bar{S}_1 = \frac{1}{2} \dot{E}_1 \dot{I}_E^* = P_1 + jQ_1$$

associata al generatore stesso.

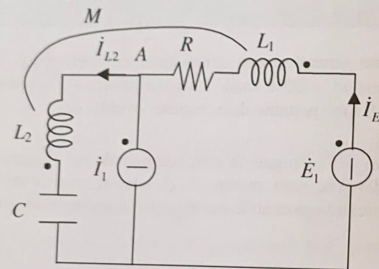


Fig. 2

Applicando il I principio di Kirchhoff al nodo A ed il II principio di Kirchhoff alla maglia comprendente gli induttori mutuamente accoppiati si ottiene il sistema di due equazioni nelle incognite $\dot{I}_E, \dot{I}_{L2}$ ⁽²⁾:

$$\begin{cases} \dot{I}_{L2} = \dot{I}_1 + \dot{I}_E \\ \dot{E}_1 = j\omega_1 L_1 \dot{I}_E - j\omega_1 M \dot{I}_{L2} + R \dot{I}_E + j\omega_1 L_2 \dot{I}_{L2} - j\omega_1 M \dot{I}_E + \frac{1}{j\omega_1 C} \dot{I}_{L2} \end{cases}$$

Posto

$$\bar{Z}_1 = R + j\omega_1(L_1 - M) = 100 + j2 \Omega,$$

$$\bar{Z}_2 = 1/(j\omega_1 C) + j\omega_1(L_2 - M) = -j3 \Omega,$$

la seconda equazione del sistema può essere riscritta come

$$\dot{E}_1 = \bar{Z}_1 \dot{I}_E + \bar{Z}_2 \dot{I}_{L2}$$

² Da notare che nella seconda equazione del sistema i termini di accoppiamento mutuo compaiono con il segno meno avendo scelto per le correnti versi non concordi rispetto al contrassegno degli induttori.

da cui, tenendo conto della prima equazione, si ottiene

$$\dot{I}_E = \frac{\dot{E}_1}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2} - \frac{\bar{Z}_2}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2} \dot{I}_1 = \frac{85}{100 - j} \approx 0,85 \exp(j0,57^\circ) \text{ A}.$$

La potenza complessa erogata dal generatore alla pulsazione ω_1 risulta pertanto

$$\bar{S}_1 = \frac{1}{2} \dot{E}_1 \dot{I}_E^* = \frac{1}{2} 100 \cdot 0,85 \exp(-j0,57^\circ) \approx 42,5 - j0,4 \text{ VA}$$

e quindi la potenza attiva e reattiva valgono rispettivamente

$$P_1 = \text{Re}\{\bar{S}_1\} = 42,5 \text{ W}, Q_1 = \text{Im}\{\bar{S}_1\} = -0,4 \text{ VAR}$$

Calcolo di P, Q

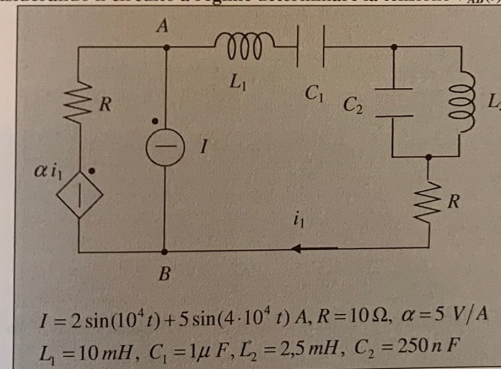
Considerati i risultati precedentemente ottenuti si ha che

$$P = P_0 + P_1 = 2,5 \text{ W}, Q = Q_1 = -0,4 \text{ VAR}.$$



3.1.5 – Sovrapposizione degli effetti

Considerando il circuito a regime determinare la tensione $V_{AB}(t)$.



$$I = 2 \sin(10^4 t) + 5 \sin(4 \cdot 10^4 t) \text{ A}, R = 10 \Omega, \alpha = 5 \text{ V/A}$$

$$L_1 = 10 \text{ mH}, C_1 = 1 \mu\text{F}, L_2 = 2,5 \text{ mH}, C_2 = 250 \text{ nF}$$

Il regime del circuito è periodico non sinusoidale in quanto la forma d'onda del generatore di corrente è somma di due oscillazioni sinusoidali di pulsazione diversa $\omega_1 = 10000 \text{ rad/s}$, $\omega_2 = 40000 \text{ rad/s}$.

Nel circuito sono presenti un collegamento risonante serie ed un collegamento risonante parallelo le cui pulsazioni di risonanza sono rispettivamente

$$\omega_{01} = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = 10000 \text{ rad/s}, \quad \omega_{02} = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}} = 40000 \text{ rad/s};$$

in particolare si ha che $\omega_{01} \equiv \omega_1$, $\omega_{02} \equiv \omega_2$.

Applicando il principio di sovrapposizione degli effetti si ha che

$$V_{AB}(t) = V'_{AB}(t) + V''_{AB}(t)$$

essendo $V'_{AB}(t)$, $V''_{AB}(t)$ rispettivamente la tensione tra i nodi A, B calcolata quando nel circuito assegnato agisce la componente di $I(t)$ di pulsazione ω_1 , ω_2 .

Ciascuna delle due tensioni $V'_{AB}(t)$, $V''_{AB}(t)$ può essere calcolata utilizzando il metodo fasoriale.

Nel calcolo di $V'_{AB}(t)$ agisce la componente del generatore di corrente

$$I'(t) = 2 \sin(10^4 t) = \text{Im}\{I' \exp(j\omega_1 t)\} \quad A, \quad I' = 2 \text{ A}.$$

Tenendo conto del fatto che alla pulsazione ω_1 il collegamento risonante serie è in risonanza ed ha quindi impedenza nulla mentre il collegamento risonante parallelo ha impedenza

$$\bar{Z}_p = \frac{j\omega_1 L_2}{1 - (\omega_1/\omega_{02})^2} = j26,667 \Omega$$

il calcolo del fasore $\dot{V}'_{AB}$ può essere effettuato nel circuito equivalente mostrato in Fig. 1.

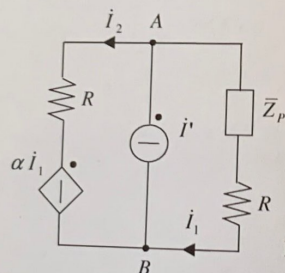


Fig. 1

Considerato tale circuito, assumendo come incognite le correnti di ramo i_1 , i_2 ed applicando il metodo del "tableau", si ha il seguente sistema

$$\begin{cases} i_1 + i_2 = I' \\ R i_2 + \alpha i_1 = (\bar{Z}_p + R) i_1 \end{cases}$$

Il principio di Kirchhoff nodo A

Il principio di Kirchhoff maglia esterna

da cui si ricava che

$$i_1 = \frac{R}{2R - \alpha + \bar{Z}_p} I'.$$

Il fasore della tensione tra i nodi A, B è pertanto dato da

$$V'_{AB} = (R + \bar{Z}_p) \frac{R}{2R - \alpha + \bar{Z}_p} I' = 18,62 \exp(j8,802^\circ) = 18,62 \exp(j0,154) \text{ V}$$

da cui segue che

$$V'_{AB}(t) = \text{Im}\{\dot{V}'_{AB} \exp(j\omega_1 t)\} = 18,62 \sin(10^4 t + 0,154) \text{ V}.$$

Nel calcolo della componente di $V_{AB}(t)$ di pulsazione ω_2 si ha che il collegamento risonante parallelo L_2 , C_2 (cfr. Fig. 1) è in risonanza ed è pertanto equivalente ad un circuito aperto; ne segue che a tale pulsazione $i_1 = 0$ da cui

$$V''_{AB}(t) = R i'_2(t) = 50 \sin(10^4 t) \text{ V}.$$

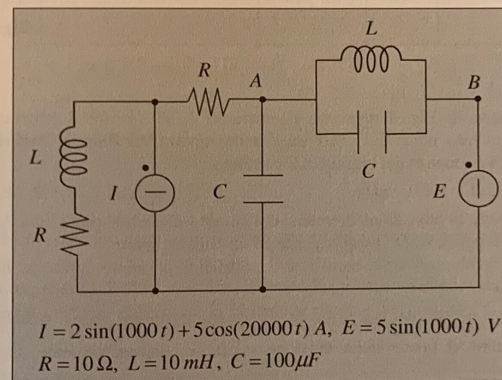
In definitiva risulta quindi

$$V_{AB}(t) = V'_{AB}(t) + V''_{AB}(t) = 18,62 \sin(10^4 t + 0,154) + 50 \sin(10^4 t) \text{ V}.$$



3.1.6 – Sovrapposizione degli effetti

Considerando il circuito a regime determinare la tensione $v_{AB}(t)$.



$$I = 2 \sin(1000 t) + 5 \cos(20000 t) \text{ A}, \quad E = 5 \sin(1000 t) \text{ V}$$

$$R = 10 \Omega, \quad L = 10 \text{ mH}, \quad C = 100 \mu\text{F}$$

Si osserva che la forma d'onda associata al generatore di corrente è somma di due oscillazioni sinusoidali rispettivamente di pulsazione $\omega_1 = 1000 \text{ rad/s}$ e $\omega_2 = 20000 \text{ rad/s}$, mentre il generatore di tensione oscilla alla pulsazione $\omega_1 = 1000 \text{ rad/s}$. Nel circuito agiscono quindi generatori a frequenza diversa ed il regime è periodico non sinusoidale. L'analisi del circuito può essere eseguita applicando il metodo fasoriale per ciascuna delle frequenze definite facendo di volta in volta agire i

generatori di uguale frequenza e sommando, per il principio di sovrapposizione degli effetti, i risultati ottenuti.

Nel caso considerato, sostituendo al generatore I due generatori di corrente in parallelo di valore $I_1(t) = 2\sin(1000t)$ A, $I_2(t) = 5\cos(20000t)$ A tali che $I(t) = I_1(t) + I_2(t)$ si ottiene un circuito equivalente, rispetto al calcolo della tensione $v_{AB}(t)$, al circuito assegnato.

Nel circuito equivalente, mostrato in Fig. 1, si applica il principio di sovrapposizione degli effetti calcolando la tensione $v_{AB}(t)$ come $v_{AB}(t) = v'_{AB}(t) + v''_{AB}(t)$ ossia come somma dei contributi $v'_{AB}(t)$, $v''_{AB}(t)$ rispettivamente dovuti ai generatori $I_1(t)$, $E(t)$ di pulsazione ω_1 ed al generatore $I_2(t)$ di pulsazione ω_2 .

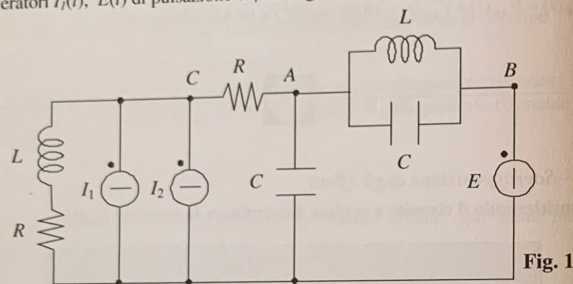


Fig. 1

Calcolo di $v'_{AB}(t)$ - pulsazione ω_1

Nel circuito di Fig. 1 agiscono i generatori I_1 , E , mentre il generatore I_2 è disattivato ovvero equivalente ad un circuito aperto. Si osserva inoltre che la pulsazione di risonanza del circuito LC parallelo

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC} = 1000 \text{ rad/s}$$

coincide con la pulsazione di analisi del circuito ω_1 : a tale pulsazione, quindi, il collegamento parallelo LC è equivalente ad un circuito aperto.

Poiché i generatori I_1 , E sono isofrequenziali è possibile applicare il metodo fasoriale. Posto

$$I_1(t) = \text{Im}\{\dot{I}_1 \exp(j\omega_1 t)\}, \dot{I}_1 = 2 \text{ A}, E(t) = \text{Im}\{\dot{E} \exp(j\omega_1 t)\}, \dot{E} = 5 \text{ V}$$

si determina il fasore della tensione $v'_{AB}(t)$ e, successivamente, la tensione stessa come

$$v'_{AB}(t) = \text{Im}\{\dot{V}'_{AB} \exp(j\omega_1 t)\}.$$

Tenendo conto delle precedenti osservazioni, il calcolo del fasore $\dot{V}'_{AB}$ può essere fatto nel circuito equivalente di Fig. 2.

Si ha che

$$\dot{V}'_{AB} = \dot{V}_{AO} + \dot{V}_{OB} = \frac{1}{j\omega_1 C} \dot{I}_A - \dot{E}.$$

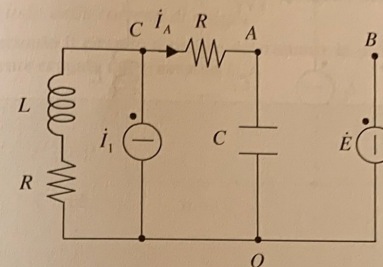


Fig. 2

La corrente $\dot{I}_A$ può essere calcolata applicando la regola del partitore di corrente al nodo C; si ha che

$$\dot{I}_A = \frac{\bar{Z}_{RL}}{\bar{Z}_{RL} + \bar{Z}_{RC}} \dot{I}_1 = \frac{(R + j\omega_1 L)(j\omega_1 C)}{1 - \omega_1^2 LC + j\omega_1 2RC} \dot{I}_1 = (0,5 + j0,5) \dot{I}_1$$

avendo posto

$$\bar{Z}_{RL} = R + j\omega_1 L = 10 + j10 \Omega, \bar{Z}_{RC} = R + 1/(j\omega_1 C) = 10 - j10 \Omega.$$

Ne segue che

$$\dot{V}'_{AB} = \frac{1}{j\omega_1 C} \dot{I}_A - \dot{E} = 5 - j10 = 11,18 \exp(-j1,107) \text{ V}$$

e quindi

$$v'_{AB}(t) = \text{Im}\{\dot{V}'_{AB} \exp(j\omega_1 t)\} = 11,18 \sin(1000t - 1,107) \text{ V}.$$

Calcolo di $v''_{AB}(t)$ - pulsazione ω_2

Con riferimento al circuito di Fig. 1, nel caso considerato agisce il solo generatore I_2 essendo i generatori I_1 , E disattivati ed equivalenti rispettivamente ad un circuito aperto e ad un cortocircuito. Il gruppo LC parallelo presenta in questo caso una impedenza di tipo capacitivo essendo la pulsazione di analisi ($\omega_2 = 20000$ rad/s) maggiore della pulsazione di risonanza propria del gruppo LC ($\omega_0 = 1000$ rad/s).

Posto

$$I_2(t) = \text{Re}\{\dot{I}_2 \exp(j\omega_2 t)\}, \dot{I}_2 = 5 \text{ A},$$

si applica il metodo fasoriale per determinare il fasore della tensione $v''_{AB}(t)$ nel circuito equivalente mostrato in Fig. 3, dove $C_p = 2C$. Il circuito è ottenuto tenendo conto del fatto che $I_1 = 0$ e che, essendo il generatore di tensione E cortocircuitato, i condensatori di capacità C posti tra i nodi A, B e tra i nodi A, O (cfr. Fig. 1) risultano in parallelo ed equivalenti quindi ad un condensatore di capacità doppia.

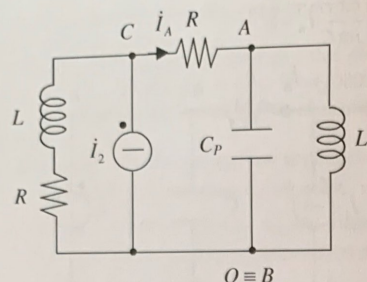


Fig. 3

Il fasore cercato è dato da

$$\dot{V}_{AB}'' = \bar{Z}_P \dot{I}_A = \bar{Z}_P \frac{\bar{Z}_{RL}}{(R + \bar{Z}_P) + \bar{Z}_{RL}} \dot{I}_2$$

dove

$$\bar{Z}_P = \frac{(j\omega_2 L)(1/j\omega_2 C_P)}{(j\omega_2 L) + (1/j\omega_2 C_P)} = \frac{j\omega_2 L}{1 - \omega_2^2 L C_P} = \frac{j200}{1 - 800} \equiv -j0,25 \, \Omega,$$

$$\bar{Z}_{RL} = R + j\omega_2 L = 10 + j200 \, \Omega,$$

ed avendo applicato, per determinare $\dot{I}_A$, la regola del partitore di corrente in corrispondenza del nodo C. Numericamente, si ha che

$$\begin{aligned} \dot{V}_{AB}'' &= \bar{Z}_P \frac{\bar{Z}_{RL}}{(R + \bar{Z}_P) + \bar{Z}_{RL}} \dot{I}_2 \equiv \\ &\equiv -j0,25 \cdot \frac{(10 + j200)}{(10 - j0,25) + (10 + j200)} \cdot 5 = 1,25 \exp(-j1,52) \, V \end{aligned}$$

da cui

$$v_{AB}''(t) = \text{Re}\{\dot{V}_{AB}'' \exp(j\omega_2 t)\} = 1,25 \cos(20000t - 1,52) \, V.$$

Calcolo di $v_{AB}(t)$

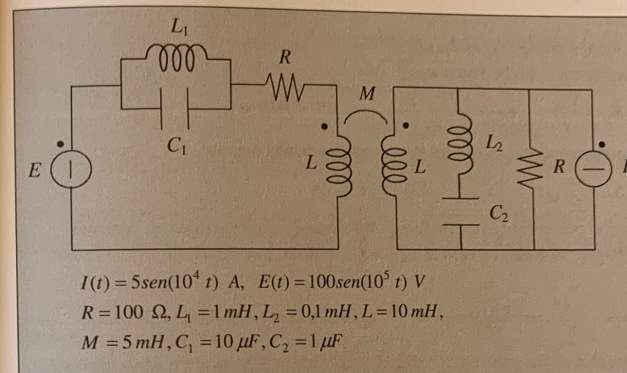
La tensione $v_{AB}(t)$ si ottiene come somma dei due contributi precedentemente calcolati:

$$v_{AB}(t) = v_{AB}'(t) + v_{AB}''(t) = 11,18 \sin(1000t - 1,107) + 1,25 \cos(20000t - 1,52) \, V.$$

3.2 SEZIONE B – ESERCIZI CON TRACCIA DELLA SOLUZIONE

3.2.1 – Metodo delle correnti di maglia

Considerando il circuito a regime determinare la potenza attiva e reattiva singolarmente erogata dai generatori E, I .



$$\begin{aligned} I(t) &= 5 \sin(10^4 t) \, A, \quad E(t) = 100 \sin(10^5 t) \, V \\ R &= 100 \, \Omega, \quad L_1 = 1 \, mH, \quad L_2 = 0,1 \, mH, \quad L = 10 \, mH, \\ M &= 5 \, mH, \quad C_1 = 10 \, \mu F, \quad C_2 = 1 \, \mu F \end{aligned}$$

Il circuito è a regime periodico non sinusoidale essendo eccitato da un generatore sinusoidale di corrente di pulsazione $\omega_1 = 10^4 \, \text{rad/s}$ e da uno di tensione caratterizzato da $\omega_2 = 10^5 \, \text{rad/s}$.

Nel circuito sono inoltre presenti un collegamento risonante parallelo ed uno serie le cui pulsazioni di risonanza sono rispettivamente

$$\omega_{01} = 1/\sqrt{L_1 C_1} = 10^4 \, \text{rad/s} \equiv \omega_1, \quad \omega_{02} = 1/\sqrt{L_2 C_2} = 10^5 \, \text{rad/s} \equiv \omega_2.$$

La potenza attiva e reattiva erogata dai generatori presenti nel circuito è data da

$$P = P_{G1} + P_{G2}, \quad Q = Q_{G1} + Q_{G2}$$

essendo $P_{Gi}, Q_{Gi}, i = 1, 2$ la potenza associata alla pulsazione $\omega_i, i = 1, 2$. Nel caso considerato $I(t)$ non ha componente alla pulsazione ω_2 mentre $E(t)$ non ha componente alla pulsazione ω_1 . Ne segue che $P_{G1} = P_{I1}, Q_{G1} = Q_{I1}$ ovvero nel calcolo della potenza P_{G1}, Q_{G1} si considera il solo generatore con componente di pulsazione ω_1 e quindi il generatore di corrente.

Analogamente si ha che $P_{G2} = P_{E2}, Q_{G2} = Q_{E2}$ essendo il generatore di tensione l'unico con pulsazione ω_2 .

Calcolo della potenza erogata da I - pulsazione ω_1

Si considera il circuito per l'analisi fasoriale mostrato in Fig. 1 in cui $i = 5 \text{ A}$ e dove si è tenuto conto della risonanza del collegamento parallelo L_1, C_1 e del fatto che il generatore di tensione non ha componenti sinusoidali di pulsazione ω_1 .

Poiché $i_{L1} = 0$ si ha che $\bar{Z}_L = \bar{V}_2 / \bar{i}_{L2} = j\omega_1 L = j100 \Omega$.

Posto

$$\bar{Z}_{LC2} = j\omega_1 L_2 + 1/(j\omega_1 C_2) = -j99 \Omega.$$

l'impedenza vista dal generatore i vale

$$\bar{Z}_P = \frac{\bar{V}_{AB}}{i} = \frac{1}{(1/\bar{Z}_L) + (1/\bar{Z}_{LC2}) + 1/R} \cong 100 - j1,01 \Omega.$$

La potenza complessa erogata dal generatore risulta dunque

$$\bar{S}_I = \frac{1}{2} \bar{V}_{AB} i^* = \frac{1}{2} \bar{Z}_P |i|^2 = 1250 - j12,6 \text{ VA}$$

da cui si ricava la potenza attiva e reattiva erogata dal generatore di corrente

$$P_I = P_{I1} = \text{Re}\{\bar{S}_I\} = 1250 \text{ W}, Q_I = Q_{I1} = \text{Im}\{\bar{S}_I\} = -12,6 \text{ VAR}.$$

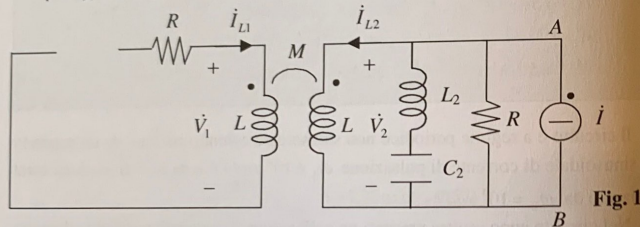


Fig. 1

Calcolo della potenza erogata da E - pulsazione ω_2

Il circuito equivalente da considerare per l'analisi fasoriale è mostrato in Fig. 2 dove si è tenuto conto del fatto che il generatore di corrente è disattivato ed il gruppo risonante serie è in risonanza e pertanto equivalente ad un corto circuito.

Per il circuito di Fig. 2, dove $\bar{Z}_1 = (j\omega_2 L_1) // [1/(j\omega_2 C_2)] = -j1,01 \Omega$, vale il seguente sistema di equazioni derivante dall'applicazione del metodo delle correnti di maglia

$$\begin{cases} \dot{E} = (\bar{Z}_1 + R + j\omega_2 L) \dot{i}_{L1} + j\omega_2 M \dot{i}_{L2} \\ 0 = j\omega_2 L \dot{i}_{L2} + j\omega_2 M \dot{i}_{L1} \end{cases}$$

da cui si ricava che

$$\dot{i}_{L1} = \frac{\dot{E}}{\bar{Z}_1 + R + j\omega_2 L [1 - (M/L)^2]} = 0,018 - j0,131 \text{ A}.$$

Ne segue che la potenza complessa erogata dal generatore di tensione risulta

$$\bar{S}_E = \frac{1}{2} \dot{E} \dot{i}_{L1}^* = 0,9 + j6,6 \text{ VA}$$

e quindi la potenza attiva e reattiva erogata valgono rispettivamente

$$P_E = P_{E2} = \text{Re}\{\bar{S}_E\} = 0,9 \text{ W}, Q_E = Q_{E2} = \text{Im}\{\bar{S}_E\} = 6,6 \text{ VAR}.$$

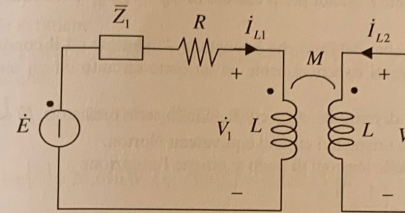
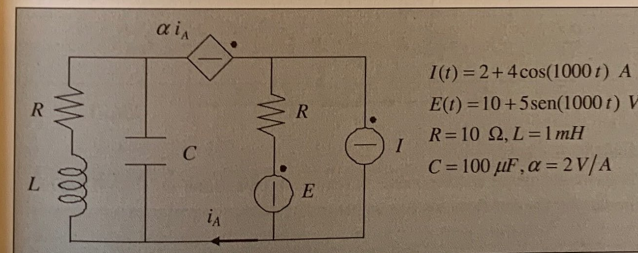


Fig. 2

3.2.2 - Metodo delle tensioni di nodo

Considerando il circuito a regime determinare la potenza attiva e reattiva erogata dal generatore I.



$$\begin{aligned} I(t) &= 2 + 4 \cos(1000t) \text{ A} \\ E(t) &= 10 + 5 \sin(1000t) \text{ V} \\ R &= 10 \Omega, L = 1 \text{ mH} \\ C &= 100 \mu\text{F}, \alpha = 2 \text{ V/A} \end{aligned}$$

La potenza attiva e reattiva erogata dal generatore di corrente può essere calcolata come

$$P = P_0 + P_1, Q = Q_1$$

avendo indicato con P_0 la potenza erogata in continua e con P_1, Q_1 la potenza attiva e reattiva associata alla componente sinusoidale di pulsazione $\omega_1 = 1000 \text{ rad/s}$.

Calcolo di P_0

Nel circuito agiscono le componenti costanti (o continue) $I_0 = 2 \text{ A}$, $E_0 = 10 \text{ V}$ dei due generatori. Il circuito equivalente per il calcolo della tensione V_{AB} ai capi del generatore di corrente e quindi per il calcolo di $P_0 = V_{AB} I_0$ è mostrato in Fig. 1 dove:

- si è tenuto conto del fatto che in continua l'induttore ed il condensatore sono equivalenti rispettivamente ad un corto circuito ed un circuito aperto;
- il generatore di tensione αI_A ed E_0 con in serie i resistori R sono stati sostituiti con i rispettivi circuiti equivalenti Norton.

Applicando il metodo delle tensioni di nodo si ottiene l'equazione

$$I_0 + \frac{E_0}{R} + \frac{\alpha I_A}{R} = V_{AB} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R} \right)$$

avendo assunto il nodo B come nodo di riferimento.

La corrente I_A può essere espressa in funzione della tensione V_{AB} essendo per il principio di Kirchhoff applicato al nodo A'

$$\frac{\alpha I_A}{R} = I_A + \frac{V_{AB}}{R} \rightarrow I_A = \frac{V_{AB}}{\alpha - R}$$

Si ricava $V_{AB} = 13,33 \text{ V}$ e quindi $P_0 = 26,66 \text{ W}$.

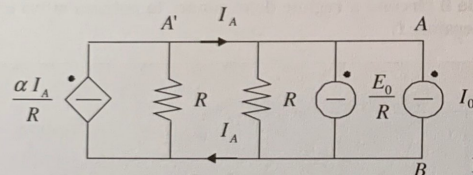


Fig. 1

Calcolo di P_1, Q_1

Nel circuito agisce la componente di segnale di pulsazione $\omega_1 = 1000 \text{ rad/s}$.

Il circuito per l'analisi fasoriale è mostrato in Fig. 2 dove

- $I_1 = 4 \exp(j\pi/2) \text{ A}$, $\dot{E}_1 = 5 \text{ V}$,
- $\bar{Z}_p = (R + j\omega_1 L) // [1/(j\omega_1 C)] = 5,525 - j5,028 \Omega$
- i generatori di tensione $\dot{E}_1$ ed $\alpha \dot{I}_A$ con in serie le impedenze $R, \bar{Z}_p$ sono stati sostituiti con i rispettivi equivalenti Norton.

In analogia con quanto fatto per il calcolo di P_0 (cfr. Fig. 1, 2) vale il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \dot{I}_1 + \frac{\dot{E}_1}{R} + \frac{\alpha \dot{I}_A}{\bar{Z}_p} = \dot{V}_{AB} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{\bar{Z}_p} \right) \\ \frac{\alpha \dot{I}_A}{R} = \dot{I}_A + \frac{\dot{V}_{AB}}{R} \end{cases}$$

dal quale si ottiene

$$\dot{V}_{AB} = 11,411 + j12,808 = 17,154 \exp(j48,301^\circ) \text{ V}$$

Ne segue che

$$\bar{S} = \frac{1}{2} \dot{V}_{AB} \dot{I}_1^* = 25,616 - j22,822 \text{ VA}$$

da cui

$$P_1 = \text{Re}\{\bar{S}\} = 25,616 \text{ W}, Q_1 = \text{Im}\{\bar{S}\} = -22,822 \text{ VAR}$$

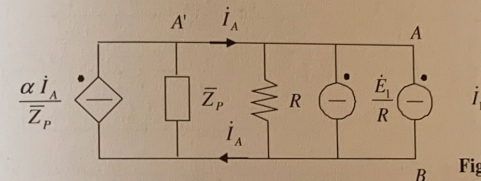


Fig. 2

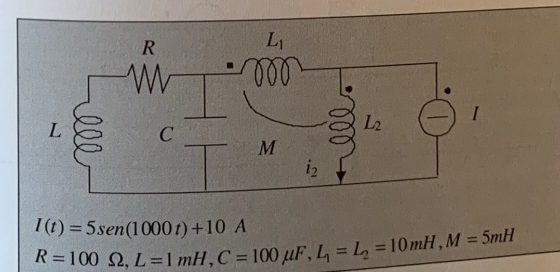
Calcolo di P, Q

La potenza attiva e reattiva erogata dal generatore di corrente risulta

$$P = P_0 + P_1 = 52,276 \text{ W}, Q = Q_1 = -22,822 \text{ VAR}$$

3.2.3 - Circuito equivalente a T per induttori accoppiati

Considerando il circuito a regime determinare $i_2(t)$.



$$I(t) = 5 \sin(1000t) + 10 \text{ A}$$

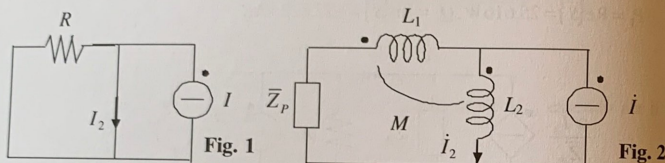
$$R = 100 \Omega, L = 1 \text{ mH}, C = 100 \mu\text{F}, L_1 = L_2 = 10 \text{ mH}, M = 5 \text{ mH}$$

La forma d'onda associata al generatore di corrente ha una componente continua $I_0 = 10 \text{ A}$ ed una componente alternata $I_1(t) = 5 \text{ sen}(1000t) \text{ A}$ di pulsazione $\omega = 1000 \text{ rad/s}$; ne segue che a regime anche la corrente $i_2(t)$ è somma di una componente continua I_{20} e di una componente alternata $I_2(t)$ con la stessa pulsazione ω .

Per il calcolo di I_{20} vale il circuito equivalente mostrato in Fig. 1 da cui si ricava che $I_{20} = I_0 = 10 \text{ A}$.

Per il calcolo di $I_2(t)$ si considera il circuito per l'analisi fasoriale mostrato in Fig. 2 dove

$$\dot{I} = 5 \text{ A}, \bar{Z}_p = (R + j\omega L) // [1/(j\omega C)] = 50,502 - j50,003 \Omega.$$



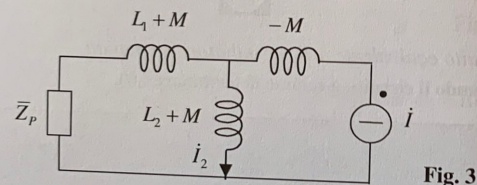
Sostituendo agli induttori mutuamente accoppiati il circuito equivalente a T così come mostrato in Fig. 3 si ha che, per la regola del partitore di corrente,

$$\dot{I}_2 = \frac{\bar{Z}_p + j\omega(L_1 + M)}{\bar{Z}_p + j\omega(L_1 + M) + j\omega(L_2 + M)} \dot{I} = 5,508 - j1,284 = 5,656 \exp(-j0,229) \text{ A}$$

da cui segue che

$$I_2(t) = \text{Im}\{\dot{I}_2 \exp(j\omega t)\} = 5,656 \text{ sen}(1000t - 0,229) \text{ A}.$$

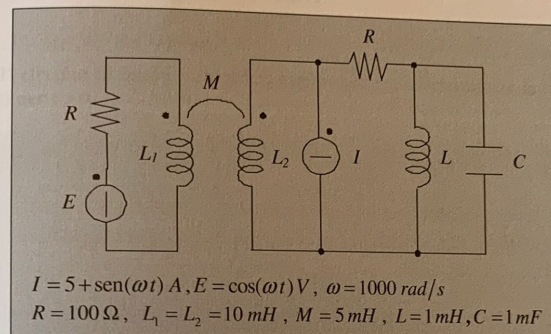
In definitiva si ha che $i_2(t) = 10 + 5,656 \text{ sen}(1000t - 0,229) \text{ A}$.



3.3 SEZIONE C – ESERCIZI DA SVOLGERE

3.3.1 – Induttori accoppiati, energia elettromagnetica media

Considerando a regime il circuito di figura determinare l'energia elettromagnetica media negli induttori mutuamente accoppiati del circuito.



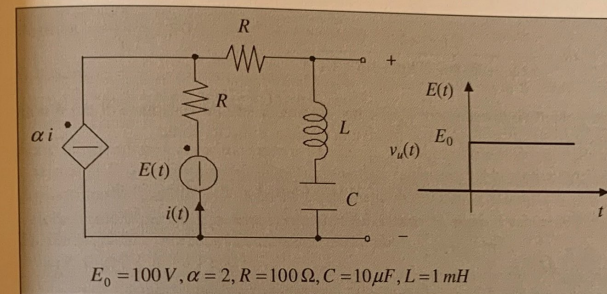
$$I = 5 + \text{sen}(\omega t) \text{ A}, E = \cos(\omega t) \text{ V}, \omega = 1000 \text{ rad/s} \\ R = 100 \Omega, L_1 = L_2 = 10 \text{ mH}, M = 5 \text{ mH}, L = 1 \text{ mH}, C = 1 \text{ mF}$$

Capitolo 4 CIRCUITI APERIODICI

4.1 SEZIONE A – ESERCIZI SVOLTI

4.1.1 – Metodo del "tableau"

Il circuito di figura si intende a regime per $t < 0$. Determinare la tensione $v_a(t)$ per $t > 0$.



Si studia la risposta del circuito alla variazione della tensione $E(t)$ utilizzando la trasformata di Laplace. Poiché il circuito è per ipotesi a regime per $t < 0$ con $E(t) = 0$, nel circuito $\mathcal{L}$ trasformato di Fig. 1 non compaiono generatori di condizioni iniziali perché all'istante $t = 0^-$ la corrente nell'induttore e la tensione ai capi del condensatore risultano nulle.

La tensione di uscita è data da $V_a(s) = [Ls + (1/Cs)]I_L(s)$.

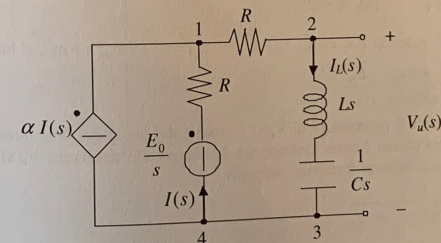


Fig. 1

Assumendo le correnti di ramo $I(s)$, $I_L(s)$ come incognite ed utilizzando il metodo del "tableau" si può scrivere il sistema

$$\begin{cases} I_L(s) = (\alpha + 1)I(s) & \text{I Principio di Kirchhoff nodo 1} \\ \frac{E_0}{s} = RI(s) + \left(R + Ls + \frac{1}{Cs}\right)I_L(s) & \text{II Principio di Kirchhoff maglia 1, 2, 3, 4, 5} \end{cases}$$

la cui soluzione è

$$I_L(s) = \frac{E_0 C}{LCs^2 + R[(\alpha + 2)/(\alpha + 1)]Cs + 1},$$

$$I(s) = \frac{1}{\alpha + 1} \frac{E_0 C}{LCs^2 + R[(\alpha + 2)/(\alpha + 1)]Cs + 1}.$$

Ne segue che

$$V_u(s) = \frac{LCs^2 + 1}{LCs^2 + R[(\alpha + 2)/(\alpha + 1)]Cs + 1} \frac{E_0}{s}.$$

Con l'obiettivo di esprimere $V_u(s)$ come somma di termini frazionari di cui è nota l'antitrasformata di Laplace, si riscrive la tensione di uscita come

$$V_u(s) = \frac{s^2 + [1/(LC)]}{s^2 + (R/L)[(\alpha + 2)/(\alpha + 1)]s + [1/(LC)]} \frac{E_0}{s} = \frac{s^2 + \omega_0^2}{s^2 + 2\omega_0\xi s + \omega_0^2} \frac{E_0}{s}$$

ponendo

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 10^4 \text{ rad/s},$$

$$2\omega_0\xi = \frac{R}{L} \frac{\alpha + 2}{\alpha + 1} \rightarrow \xi = \frac{R}{2} \frac{\alpha + 2}{\alpha + 1} \sqrt{\frac{C}{L}} = 666,67.$$

Le radici del denominatore di $V_u(s)$, espresse in funzione dei parametri ω_0 , ξ , sono date da

$$s_0 = 0,$$

$$s_1 = \left(-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}\right)\omega_0 = -1,333 \cdot 10^7 \text{ s}^{-1},$$

$$s_2 = \left(-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}\right)\omega_0 = -7,5 \text{ s}^{-1};$$

in particolare, essendo $s_1 s_2 = \omega_0^2$, $(s - s_1)(s - s_2) = s^2 + 2\omega_0\xi s + \omega_0^2$, si ha che

$$V_u(s) = \frac{s^2 + s_1 s_2}{(s - s_1)(s - s_2)} \frac{E_0}{s}.$$

Poiché il grado del numeratore di $V_u(s)$ è minore del grado del denominatore e le radici di quest'ultimo hanno molteplicità 1, è possibile riscrivere $V_u(s)$ come somma dei seguenti termini frazionari semplici

$$V_u(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s - s_1} + \frac{C}{s - s_2}.$$

dove

$$A = \lim_{s \rightarrow 0} s V_u(s) = E_0 = 100 \text{ V}$$

$$B = \lim_{s \rightarrow s_1} (s - s_1) V_u(s) = \frac{s_1 + s_2}{s_1 - s_2} E_0 \cong 100 \text{ V}$$

$$C = \lim_{s \rightarrow s_2} (s - s_2) V_u(s) = \frac{s_2 + s_1}{s_2 - s_1} E_0 = -B \cong -100 \text{ V}.$$

La tensione di uscita è pertanto data, per $t > 0$, da

$$v_u(t) = \mathcal{L}^{-1}[V_u(s)] = A + B \exp(s_1 t) + C \exp(s_2 t) = 100[1 + \exp(-1,333 \cdot 10^7 t) - \exp(-7,5 t)] \text{ V}.$$

Approfondimento

$$\text{Posto } \tau_1 = -\frac{1}{s_1} = 7,5 \cdot 10^{-8} \text{ s}, \quad \tau_2 = -\frac{1}{s_2} = 0,133 \text{ s}$$

si ha che

$$v_u(t) = E_0[1 + \exp(-t/\tau_1) - \exp(-t/\tau_2)]u(t)$$

Tenendo conto del fatto che $\tau_1 \ll \tau_2$, $v_u(t)$ può essere rappresentata su due diverse scale temporali così come mostrato nelle Fig. 2a, 2b. Nel transitorio dovuto alla variazione di $E(t)$ la tensione di uscita varia in modo esponenziale. In particolare $v_u(t)$, discontinua all'istante $t = 0$ decresce inizialmente con costante di tempo τ_1 verso il valore limite 0 per poi crescere, con costante di tempo τ_2 , verso il valore di regime E_0 . Ne segue che, per tutta la durata del transitorio,

$$0 \leq v_u(t) \leq E_0, \quad t \geq 0.$$

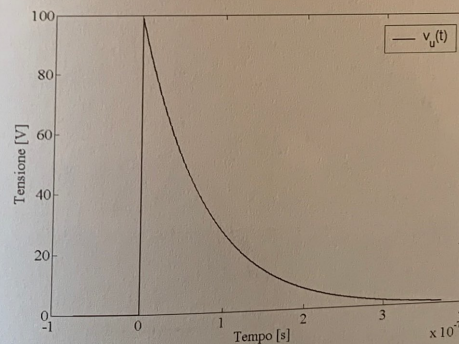


Fig. 2a

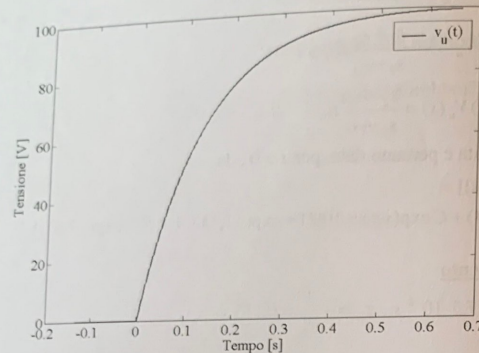
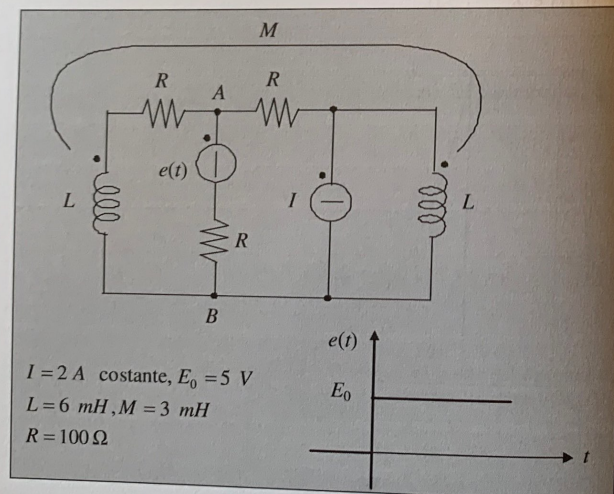


Fig. 2b

4.1.2 – Induttori accoppiati, metodo delle correnti di maglia, verifica del risultato

Il circuito di figura si intende a regime per $t < 0$. Determinare la tensione $v_{AB}(t)$ per $t > 0$.



Applicando il principio di sovrapposizione degli effetti la tensione v_{AB} può essere calcolata come somma dei contributi $v'_{AB}(t)$, $v''_{AB}(t)$ dovuti rispettivamente al generatore di corrente ed a quello di tensione:

$$v_{AB}(t) = v'_{AB}(t) + v''_{AB}(t).$$

Quando agisce il solo generatore di corrente il circuito assegnato è equivalente a quello mostrato in Fig. 1; il generatore di corrente eroga infatti una corrente costante nel tempo e poiché il circuito è per ipotesi a regime per $t < 0$ gli induttori accoppiati sono equivalenti a cortocircuiti. In particolare si ha che $I_2 = I$, $I_1 = 0$ da cui

$$v'_{AB}(t) = 0, \quad t > 0.$$

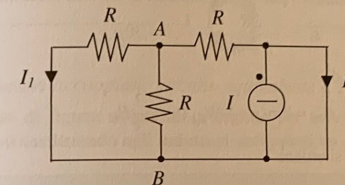


Fig. 1

Il circuito per il calcolo di $v''_{AB}(t)$ è nello stato zero per $t < 0$ essendo per ipotesi a regime con $e(t) = 0$, $t < 0$; pertanto il circuito $\mathcal{L}$ trasformato di Fig. 2, utilizzato per calcolare la trasformata di Laplace $V''_{AB}(s)$ della tensione $v''_{AB}(t)$, non ha generatori di condizioni iniziali.

Con riferimento a tale circuito, applicando il metodo delle correnti di maglia si ottiene il sistema

$$\begin{cases} \frac{E_0}{s} = (2R + Ls)I_1(s) + (Ms + R)I_2(s) \\ \frac{E_0}{s} = (Ms + R)I_1(s) + (2R + Ls)I_2(s) \end{cases}$$

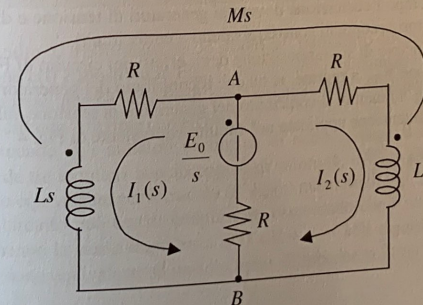


Fig. 2

Sottraendo membro a membro le due equazioni si ottiene che

$$I_1(s) = I_2(s)$$

da cui segue che

$$I_1(s) = I_2(s) = \frac{E_0}{s} \frac{1}{3R + (L + M)s},$$

$$V_{AB}''(s) = \frac{E_0}{s} - R[I_1(s) + I_2(s)] = \frac{E_0}{s} \frac{R + (L + M)s}{3R + (L + M)s}.$$

La tensione $V_{AB}''(s)$ (rapporto di due polinomi in s con grado del numeratore minore del grado del denominatore) può essere espansa in termini frazionari semplici

$$V_{AB}''(s) = \frac{C_0}{s} + \frac{C_1}{s - s_1}, \quad s_1 = -\frac{3R}{L + M} = -\frac{1}{\tau}, \tau = 30 \mu s$$

con le costanti C_0, C_1 date da

$$C_0 = \lim_{s \rightarrow 0} s V_{AB}''(s) = \frac{E_0}{3}, \quad C_1 = \lim_{s \rightarrow s_1} (s - s_1) V_{AB}''(s) = \frac{2}{3} E_0$$

Antitrasformando $V_{AB}''(s)$ si ottiene

$$v_{AB}''(t) = \frac{E_0}{3} + \frac{2}{3} E_0 \exp(-t/\tau), \quad t > 0.$$

e quindi la tensione $v_{AB}(t) = v_{AB}'(t) + v_{AB}''(t) = v_{AB}''(t)$.

Verifica

Il valore di regime della tensione v_{AB} per $t > 0$ può essere determinato oltre che come

$$V_{AB} = \lim_{t \rightarrow +\infty} v_{AB}(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\frac{E_0}{3} + \frac{2}{3} E_0 \exp(-t/\tau) \right] = \frac{E_0}{3}$$

anche considerando il circuito equivalente di Fig. 3. In tale circuito si tiene conto del fatto che quando il transitorio dovuto alla variazione di $e(t)$ si è esaurito, tutte le tensioni e tutte le correnti nel circuito assegnato risultano costanti nel tempo essendo costante nel tempo l'eccitazione dovuta ai generatori di tensione e di corrente; pertanto gli induttori accoppiati sono equivalenti a cortocircuiti.

Applicando il principio di sovrapposizione degli effetti nel circuito di Fig. 3 per determinare la tensione V_{AB} a regime, si ha che il contributo del generatore di corrente è nullo (cfr. Fig. 1) mentre il contributo del generatore di tensione vale, per la regola del partitore di tensione applicata nel circuito equivalente di Fig. 4

$$V_{AB}'' = \frac{R/2}{R + (R/2)} E_0 = \frac{E_0}{3}.$$

Risulta pertanto

$$V_{AB} = V_{AB}'' = \frac{E_0}{3}.$$

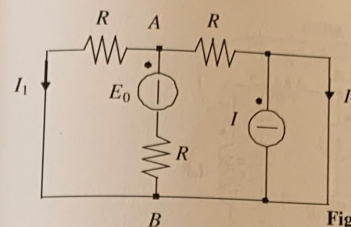


Fig. 3

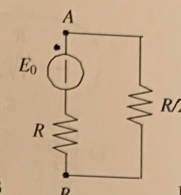
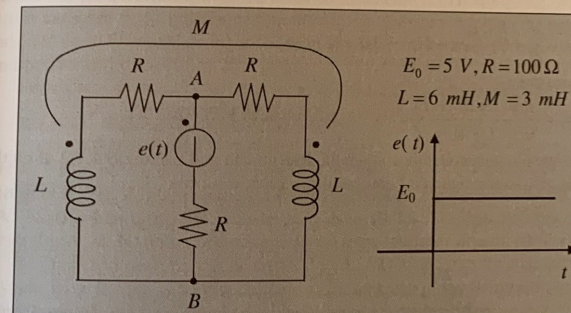


Fig. 4

4.1.3 - Induttori accoppiati: circuito equivalente a T

Il circuito di figura si intende a regime per $t < 0$. Determinare la tensione $v_{AB}(t)$ per $t > 0$ sostituendo agli induttori accoppiati un circuito equivalente a T.



Il circuito $\mathcal{L}$ trasformato per lo studio del transitorio dovuto alla variazione della tensione $e(t)$ è mostrato in Fig. 1; nel circuito non compaiono generatori di condizioni iniziali perché le correnti negli induttori sono nulle per $t < 0$ essendo per ipotesi il circuito a regime con $e(t) = 0$.

Sostituendo agli induttori accoppiati di nodo comune B il collegamento a T formato da tre induttori non accoppiati di valore $(L - M)s, (L - M)s, Ms$ si ottiene il circuito equivalente per il calcolo di $V_{AB}(s)$ mostrato in Fig. 2.

Tale circuito può essere semplificato osservando che i rami (A, A1, N) e (A, A2, N) hanno la stessa impedenza $Z(s) = R + (L - M)s$ e poiché sono in parallelo, tali rami sono equivalenti ad un solo ramo di impedenza $Z(s)/2$ così come mostrato in Fig. 3.

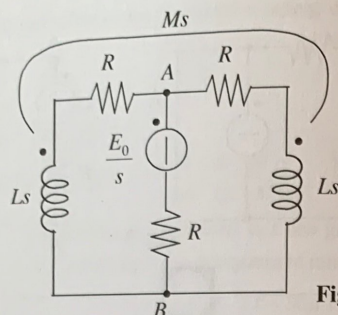


Fig. 1

Applicando nel circuito così semplificato la regola del partitore di tensione, si ha che

$$V_{AB}(s) = \frac{Z_{AB}(s)}{Z_{AB}(s) + R} \frac{E_0}{s}$$

dove

$$Z_{AB}(s) = \frac{R}{2} + \frac{L-M}{2}s + Ms = \frac{1}{2}[R + (L+M)s],$$

da cui segue che

$$V_{AB}(s) = \frac{R + (L+M)s}{3R + (L+M)s} \frac{E_0}{s}$$

L'espressione ottenuta coincide con quella determinata nell'Esercizio 4.1.2 al quale si rimanda per ciò che riguarda l'antitrasformazione; si ha che

$$v_{AB}(t) = \mathcal{L}^{-1}[V_{AB}(s)] = \frac{E_0}{3} + \frac{2}{3}E_0 \exp(-t/\tau), \quad \tau = \frac{L+M}{3R} = 30 \mu s, \quad t > 0.$$

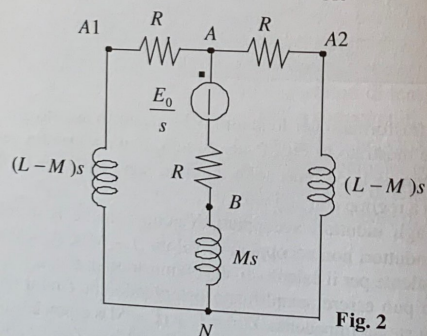


Fig. 2

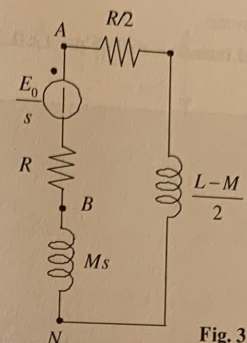


Fig. 3

Approfondimento

Nel passare dal circuito di Fig. 1 a quello di Fig. 2 (trasformazione del collegamento tra gli induttori accoppiati in un collegamento a T) il numero di elementi reattivi aumenta di 1; tuttavia, nel circuito di Fig. 2 è stato introdotto un nodo improprio (al nodo C confluiscono solo induttori) cosicché il numero di elementi reattivi indipendenti rimane 2.

Per inciso, si osservi che il fatto che la funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{V_{AB}(s)}{E_0/s} = \frac{R + (L+M)s}{3R + (L+M)s}$$

abbia 1 solo polo è dovuto alle proprietà di simmetria del circuito considerato. Nel circuito di Fig. 2 infatti, come già è stato osservato, i rami in parallelo (A, A1, N) e (A, A2, N) hanno uguale impedenza e si ha simmetria elettrica rispetto al ramo centrale (A, B, N) (tale ramo vede la stessa impedenza sia a destra che a sinistra).

Se i resistori posti tra i nodi (A, A1) e (A, A2) hanno rispettivamente valore R_1 , R_2 con $R_1 \neq R_2$ non si ha più simmetria e la funzione di trasferimento risulta di ordine 2 per ciò che riguarda sia il numeratore che il denominatore:

$$W_a(s) = \frac{V_{AB}(s)}{E_0/s} = \frac{R_1 R_2 + (R_1 + R_2)Ls + (L^2 - M^2)s^2}{[R_1 R_2 + R(R_1 + R_2)] + [(R_1 + R_2)L + 2R(L-M)]s + (L^2 - M^2)s^2}.$$

Se $R_1 = R_2 = R_A$, la funzione di trasferimento $W_a(s)$ può essere calcolata facendo riferimento al circuito di Fig. 3 dove al posto di $R/2$ si ha $R_A/2$ ottenendo

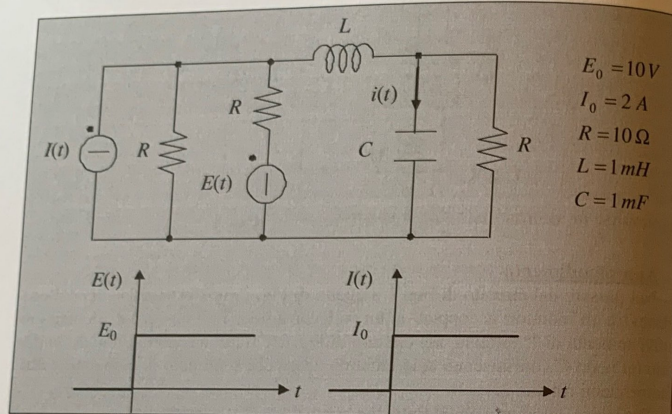
$$W_a(s) = \frac{R_A + (L+M)s}{(R_A + 2R) + (L+M)s}.$$

Se, infine, $R_1 = R_2 = R_A = R$ considerando l'ultima espressione di $W_a(s)$ si ha

$$W_a(s) = W(s).$$

4.1.4 - Teorema di Thévenin

Il circuito di figura si intende a regime per $t < 0$. Determinare la corrente $i(t)$ per $t > 0$.



Si utilizza il metodo di Laplace per determinare la corrente $i(t)$. Poiché per $t < 0$ il circuito è a regime con $E(t) = 0$, $I(t) = 0$, nel circuito $\mathcal{L}$ trasformato di Fig. 1 non compaiono i generatori di condizioni iniziali essendo nulla la corrente nell'induttore e la tensione ai capi del condensatore. Applicando il teorema di Thévenin al bipolo AB, il circuito $\mathcal{L}$ -trasformato è equivalente a quello mostrato in Fig. 2.

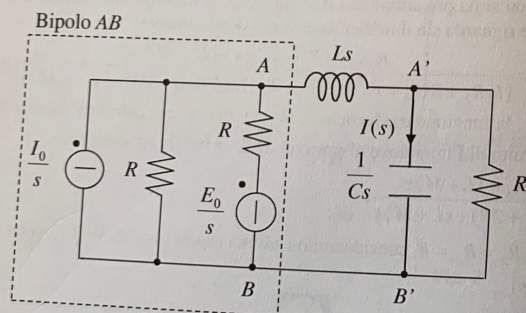


Fig. 1

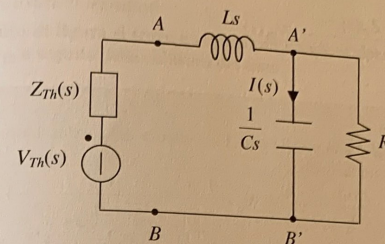


Fig. 2

Il calcolo del generatore e dell'impedenza equivalente di Thévenin deve essere effettuato staccando il bipolo AB dal resto del circuito ovvero considerando il circuito di Fig. 3. Applicando il metodo delle tensioni di nodo dopo aver trasformato il generatore reale di tensione nell'equivalente di Norton si ha che

$$V_{AB0} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R} \right) = \frac{E_0}{sR} + \frac{I_0}{s}$$

da cui

$$V_{Th} = V_{AB0} = \frac{R I_0}{2} + \frac{1}{2} \frac{E_0}{s} = \frac{V_0}{s}$$

avendo posto

$$V_0 = \frac{R I_0 + E_0}{2} = 15 \text{ V}.$$

Ancora con riferimento al circuito di Fig. 3, per il calcolo dell'impedenza di Thévenin vista dai nodi A, B i generatori di tensione e di corrente devono essere disattivati; si ha che

$$Z_{Th} = R/2.$$

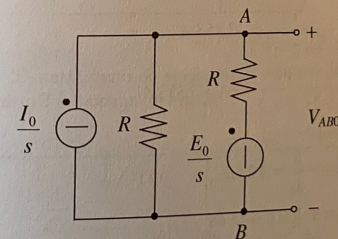


Fig. 3

Considerato di nuovo il circuito equivalente per il calcolo di $I(s)$ di Fig. 2, si ha che

$$I(s) = Cs V_{A'B'}(s)$$

ed applicando la regola del partitore di tensione

$$V_{AB}(s) = \frac{Z_p(s)}{[Z_{Th}(s) + Ls] + Z_p(s)} V_{Th}(s)$$

dove

$$Z_p(s) = \frac{R}{RCs + 1}$$

è l'impedenza equivalente al parallelo tra l'impedenza del condensatore C e quella del resistore R. Si ha pertanto che

$$I(s) = \frac{2RC}{2RCLs^2 + (R^2C + 2L)s + 3R} V_0 = \frac{1}{L} \frac{1}{s^2 + \frac{R^2C + 2L}{2RCL}s + \frac{3}{2LC}} V_0.$$

Ponendo

$$\frac{3}{2LC} = \omega_0^2, \quad \frac{R^2C + 2L}{2RCL} = 2\omega_0\xi$$

la trasformata della corrente $i(t)$ può essere riscritta come

$$I(s) = \frac{1}{L} \frac{1}{s^2 + 2\omega_0\xi s + \omega_0^2} V_0,$$

dove

$$\omega_0 = 1224,7 \text{ rad/s}, \quad \xi = 2,082.$$

Poiché $\xi > 1$, le radici s_1, s_2 del denominatore di $I(s)$ sono reali e distinte; in particolare si ha che

$$s_{1,2} = \omega_0(-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}) \rightarrow s_1 = -4786,28 \text{ s}^{-1}, s_2 = -313,373 \text{ s}^{-1}.$$

In definitiva si ha che

$$I(s) = \frac{1}{L} \frac{1}{(s - s_1)(s - s_2)} V_0 = \frac{A}{s - s_1} + \frac{B}{s - s_2}$$

dove

$$A = \lim_{s \rightarrow s_1} (s - s_1) I(s) = \frac{V_0}{L} \frac{1}{(s_1 - s_2)} = -3,353 \text{ A},$$

$$B = \lim_{s \rightarrow s_2} (s - s_2) I(s) = \frac{V_0}{L} \frac{1}{(s_2 - s_1)} = -A = 3,353 \text{ A}$$

Definendo le costanti di tempo

$$\tau_1 = -\frac{1}{s_1} = 0,21 \text{ ms}, \quad \tau_2 = -\frac{1}{s_2} = 3,2 \text{ ms}$$

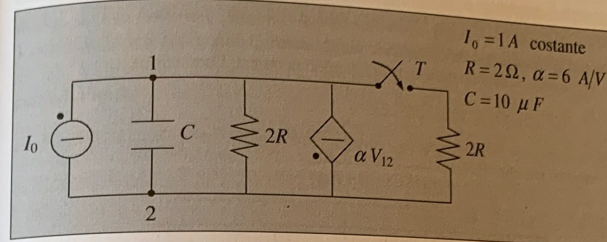
l'antitrasformata di Laplace di $I(s)$ è data da

$$i(t) = A \exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right) u(t) + B \exp\left(-\frac{t}{\tau_2}\right) u(t) = 3,353 \cdot \left[-\exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right) + \exp\left(-\frac{t}{\tau_2}\right) \right] u(t) \text{ A}$$



4.1.5 - Chiusura interruttore

Il circuito di figura si trova a regime con il tasto T aperto. Determinare la tensione V_{12} a seguito della chiusura del tasto.



Supponendo che la chiusura del tasto avvenga all'istante $t = 0$, all'istante $t = 0^-$ il circuito è per ipotesi a regime ed è equivalente al circuito mostrato in Fig. 1 essendo il condensatore un circuito aperto. In particolare, per la tensione $V_{120} = V_{12}(0^-)$ vale la seguente equazione, ottenuta applicando il I principio di Kirchhoff al nodo 1:

$$I_0 = \frac{V_{120}}{2R} + \alpha V_{120} \text{ da cui si ottiene } V_{120} = \frac{2R}{1 + 2R\alpha} I_0 = 0,16 \text{ V}.$$

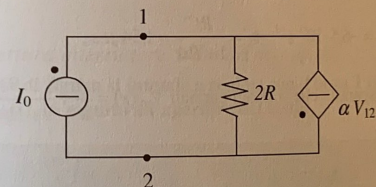


Fig. 1

Il circuito $\mathcal{L}$ -trasformato da studiare per valutare il transitorio che segue alla chiusura del tasto T è mostrato in Fig. 2.

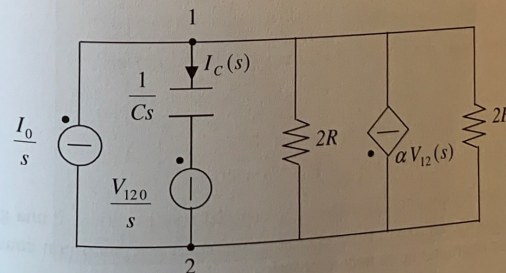


Fig. 2

Il circuito può essere semplificato sostituendo ai due resistori in parallelo il resistore equivalente di valore R ed utilizzando l'equivalente di Norton sul ramo contenente il generatore di condizioni iniziali associato al condensatore (l'equivalenza si ha con il generatore di Norton $I_N(s) = (V_{120}/s) \cdot (Cs) = CV_{120}$ e con l'impedenza di Norton di valore $Z_N(s) = 1/(Cs)$). Si ottiene il circuito mostrato in Fig. 3 dove tutti rami sono o generatori di corrente o impedenze.

Applicando il metodo delle tensioni di nodo si ottiene l'equazione

$$\frac{I_0}{s} + CV_{120} - \alpha V_{12}(s) = V_{12}(s) \cdot \left(Cs + \frac{1}{R} \right)$$

da cui si ricava che $V_{12}(s) = \frac{R}{s} \frac{V_{120}Cs + I_0}{RCs + (1 + R\alpha)}$.

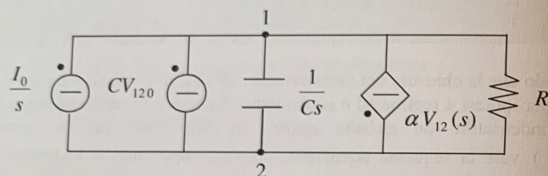


Fig. 3

La tensione ottenuta è, nel dominio di Laplace, il rapporto tra due polinomi in s con il grado del numeratore inferiore a quello del denominatore; poiché le radici di quest'ultimo sono

$$s = 0, \quad s = s_1 = -\frac{1}{\tau_1} = -6,5 \cdot 10^5 \text{ s}^{-1}, \quad \tau_1 = \frac{RC}{1 + R\alpha} = 1,54 \mu\text{s},$$

$V_{12}(s)$ può essere espansa nelle frazioni parziali $V_{12}(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + (1/\tau_1)}$

dove

$$A = \lim_{s \rightarrow 0} s V_{12}(s) = \frac{RI_0}{1 + R\alpha} = 153,8 \text{ mV},$$

$$B = \lim_{s \rightarrow s_1} (s - s_1) V_{12}(s) = V_{120} - \frac{RI_0}{1 + R\alpha} = 6,2 \text{ mV}.$$

Antitrasformando $V_{12}(s)$ si ha che

$$V_{12}(t) = [A + B \exp(-t/\tau_1)] = [153,8 + 6,2 \exp(-6,5 \cdot 10^5 t)] u(t) \text{ mV}$$

Verifiche

Dall'espressione di $V_{12}(t)$ ottenuta si ricava che:

$$V_{12}(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} V_{12}(t) = A + B = V_{120} = V_{12}(0^-) = 160 \text{ mV}$$

in accordo con il fatto che V_{12} , tensione ai capi del condensatore, è una grandezza di stato e come tale deve essere continua; il circuito assegnato non contiene infatti né maglie improprie né ha nodi impropri;

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} V_{12}(t) = A = \frac{RI_0}{1 + R\alpha} = 153,8 \text{ mV};$$

per $t \rightarrow +\infty$ il transitorio che segue la chiusura del tasto si è esaurito ed il circuito assegnato, eccitato con un generatore di corrente costante, è equivalente al circuito di Fig. 4; tale circuito è già stato studiato nell'analisi per $t = 0^-$: il circuito di Fig. 1 coincide infatti con quello qui considerato sostituendo ad R il valore $R/2$; operando tale sostituzione nel risultato ottenuto nello studio per $t = 0^-$ si ha che, nel circuito di Fig. 4,

$$V_{12} = \frac{2(R/2)}{1 + 2(R/2)\alpha} I_0 = \frac{R}{1 + R\alpha} I_0 \equiv A.$$

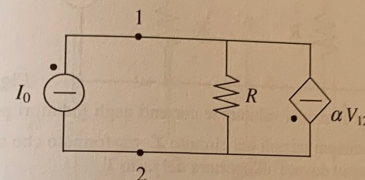
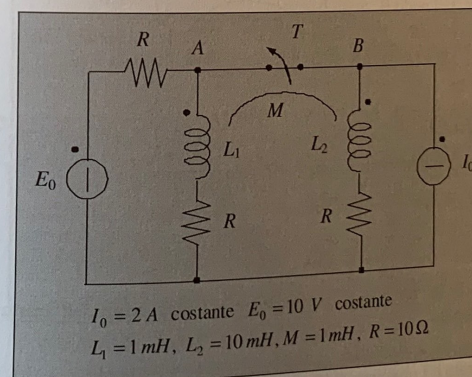


Fig. 4

4.1.6 – Apertura interruttore, induttori accoppiati

Il circuito di figura si intende a regime con il tasto T chiuso. Determinare la tensione $v_{AB}(t)$ in seguito all'apertura del tasto.



Supponendo che il tasto sia aperto all'istante $t = 0$ si determina lo stato del circuito all'istante $t = 0^-$. Il circuito equivalente è mostrato in Fig. 1; in particolare, rispetto al circuito assegnato, gli induttori sono stati sostituiti con cortocircuiti essendo il circuito prima dell'apertura del tasto a regime con l'eccitazione costante dei due generatori I , E .

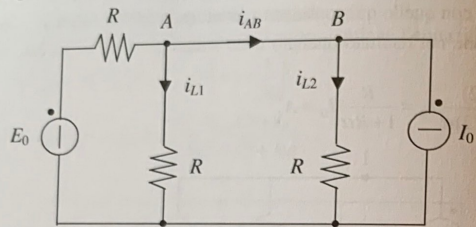


Fig. 1

Nel circuito di Fig. 1 interessa valutare le correnti negli induttori per poter definire i generatori di condizioni iniziali nel circuito $\mathcal{L}$ -trasformato che sarà utilizzato per lo studio del transitorio dovuto all'apertura del tasto T.

Applicando il principio di sovrapposizione degli effetti si calcolano separatamente i contributi alle correnti dovuti ai due generatori.

Quando agisce il solo generatore di tensione il circuito da considerare è mostrato in Fig. 2. Si ha che, applicando in successione la regola del partitore di tensione e il II principio di Kirchhoff

$$i_{L1} = i_{L2} = \frac{1}{2} i_E = \frac{1}{2} \frac{E_0}{R + (R/2)} = \frac{E_0}{3R}.$$

Quando agisce il solo generatore di corrente si ha il circuito di Fig. 3. Per la regola del partitore di corrente applicata prima in corrispondenza del nodo A, quindi in corrispondenza del nodo B,

$$i_{L1} = \frac{1}{2} i, \quad i = \frac{R}{R + (R/2)} I_0 = \frac{2}{3} I_0$$

da cui segue che

$$i_{L1}'' = \frac{I_0}{3}, \quad i_{L2}'' = I_0 - i = \frac{I_0}{3}.$$

La corrente negli induttori all'istante $t = 0^-$ vale pertanto

$$i_{L1}(0^-) = i_{L1}' + i_{L1}'' = \frac{E_0}{3R} + \frac{I_0}{3} = 1 \text{ A},$$

$$i_{L2}(0^-) = i_{L2}' + i_{L2}'' = \frac{E_0}{3R} + \frac{I_0}{3} = 1 \text{ A},$$

da cui segue che la corrente nel ramo contenente il tasto prima dell'apertura del tasto stesso è data da

$$i_{AB}(0^-) = i_{L2}(0^-) - I_0 = -1 \text{ A}$$

avendo applicato il I principio di Kirchhoff al nodo B del circuito di Fig. 1.

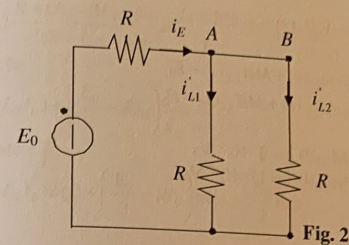


Fig. 2

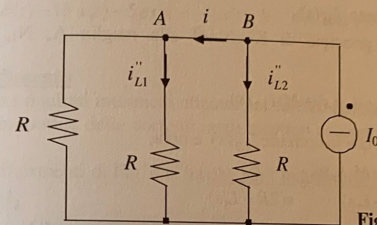


Fig. 3

Il circuito $\mathcal{L}$ -trasformato da studiare per valutare il transitorio associato all'apertura del tasto è mostrato in Fig. 4.

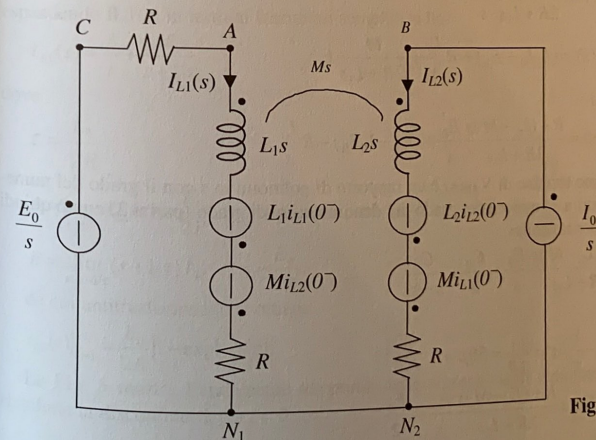


Fig. 4

Si ha che, essendo i nodi N_1 , N_2 equipotenziali,

$$V_{AB}(s) = V_{AN1}(s) - V_{AN2}(s)$$

dove

$$V_{AN1}(s) = (R + L_1 s) I_{L1}(s) + M s I_{L2}(s) - E_1$$

$$V_{AN2}(s) = (R + L_2 s) I_{L2}(s) + M s I_{L1}(s) - E_2$$

avendo posto

$$E_1 = L_1 i_{L1}(0^-) + M i_{L2}(0^-) = 2 \cdot 10^{-3} \text{ Vs}$$

$$E_2 = L_2 i_{L2}(0^-) + M i_{L1}(0^-) = 11 \cdot 10^{-3} \text{ Vs}$$

Poiché

$$I_{L2}(s) = \frac{I_0}{s}$$

occorre calcolare soltanto $I_{L1}(s)$.

Applicando il II principio di Kirchhoff alla maglia A, N_1 , C si ottiene l'equazione

$$\frac{E_0}{s} + E_1 = (2R + L_1 s) I_{L1}(s) + M s I_{L2}(s)$$

da cui, tenendo conto che la corrente $I_{L2}(s)$ è nota,

$$I_{L1}(s) = \frac{E_0 + (E_1 - M_1 I_0) s}{s(2R + L_1 s)} = \frac{E_0}{s(2R + L_1 s)}$$

essendo

$$E_1 - M_1 I_0 = 0.$$

Si ha pertanto che

$$V_{AN1}(s) = \frac{R + L_1 s}{2R + L_1 s} \frac{E_0}{s},$$

$$V_{BN2}(s) = (L_2 I_0 - E_2) + R \frac{I_0}{s} + \frac{M}{2R + L_1 s} E_0$$

da cui

$$V_{AB}(s) = \frac{R + (L_1 - M) s}{2R + L_1 s} \frac{E_0}{s} + (E_2 - L_2 I_0) - R \frac{I_0}{s}.$$

Il primo termine di $V_{AB}(s)$ è un rapporto di polinomi in s con il grado del numeratore (pari a 1) minore del grado del denominatore di grado (pari a 2) e può quindi essere riscritto come

$$\frac{R + (L_1 - M) s}{2R + L_1 s} \frac{E_0}{s} = \frac{C_0}{s} + \frac{C_1}{s - s_1}$$

dove

$$s_1 = -\frac{1}{\tau}, \quad \tau = \frac{L_1}{2R} = 50 \mu s$$

$$C_0 = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{R + (L_1 - M) s}{2R + L_1 s} \frac{E_0}{s} = \frac{E_0}{2}$$

$$C_1 = \lim_{s \rightarrow s_1} (s - s_1) \frac{R + (L_1 - M) s}{2R + L_1 s} \frac{E_0}{s} = \frac{L_1 - 2M}{L_1} \frac{E_0}{2} = -\frac{E_0}{2}$$

In definitiva si ha che

$$V_{AB}(s) = (E_2 - L_2 I_0) + \left(\frac{E_0}{2} - R I_0 \right) \frac{1}{s} - \frac{E_0/2}{s + (1/\tau)}$$

la cui antitrasformata è

$$v_{AB}(t) = (E_2 - L_2 I_0) \delta(t) + \left(\frac{E_0}{2} - R I_0 \right) u(t) - \left[\frac{E_0}{2} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] u(t) =$$

$$= -9 \cdot 10^{-3} \delta(t) - 15 u(t) - 5 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) u(t) \quad V, \quad \tau = 50 \mu s.$$

Approfondimento

Utilizzando i risultati intermedi ottenuti nel calcolo di $v_{AB}(t)$ è possibile valutare l'andamento temporale delle correnti negli induttori accoppiati dopo l'apertura del tasto T.

Considerati i riferimenti di Fig. 4 si ha che per l'induttore L_2 la corrente è

$$i_{L2}(t)|_{t>0} = I_0$$

essendo imposta dal generatore I_0 .

Per l'induttore L_1 l'analisi nel dominio di Laplace ha dato come risultato

$$I_{L1}(s) = \frac{E_0}{s(2R + L_1 s)};$$

espandendo $I_{L1}(s)$ in termini frazionari semplici si ha

$$I_{L1}(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + 1/\tau}$$

dove

$$\tau = \frac{L_1}{2R},$$

$$A = \lim_{s \rightarrow 0} s I_{L1}(s) = \frac{E_0}{2R},$$

$$B = \lim_{s \rightarrow -1/\tau} (s + 1/\tau) I_{L1}(s) = -\frac{E_0}{2R}$$

da cui antitrasformando si ottiene

$$i_{L1}(t)|_{t>0} = \frac{E_0}{2R} [1 - \exp(-t/\tau)].$$

Le Fig. 5 mostra l'andamento temporale delle correnti negli induttori evidenziandone la discontinuità per $t = 0$.

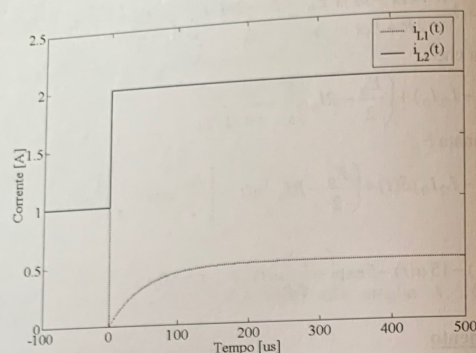


Fig. 5

Verifica

Esaurito il transitorio dovuto all'apertura del tasto, il circuito assegnato è equivalente a quello mostrato in Fig. 6; i generatori E_0 , I_0 forniscono infatti rispettivamente una tensione e una corrente costanti nel tempo cosicché a regime tutte le tensioni e tutte le correnti nel circuito risultano costanti; in particolare gli induttori accoppiati sono equivalenti a cortocircuiti.

Nel circuito di Fig. 5 si ha che

$$V_{AB} = \frac{1}{2} E_0 - R I_0 = -15 \text{ V};$$

tale valore coincide con il limite per $t \rightarrow +\infty$ della tensione $v_{AB}(t)$ ricavata dall'analisi del transitorio precedentemente eseguita.

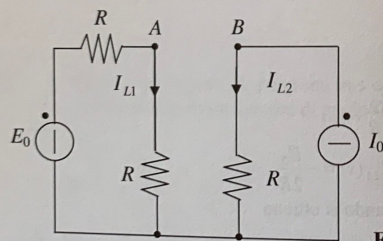


Fig. 6

4.1.7 (*) - Approfondimento. Analisi energetica relativa all'Es. 4.1.6

Utilizzando i risultati ottenuti nell'Esercizio 4.1.6 si valuti l'energia assorbita dal ramo contenente il tasto T in seguito all'apertura del tasto stesso.

Con riferimento ai risultati ottenuti nell'Esercizio 4.1.6 si ha che nel ramo contenente il tasto scorre la corrente $I_{AB} = -1$ A prima dell'apertura del tasto stesso ed una corrente nulla a tasto aperto. Per il principio di sostituzione tale ramo può pertanto essere sostituito da un generatore ideale di corrente di valore

$$i_{AB}(t) = I_{AB} u(-t)$$

essendo $u(t)$ la funzione a gradino unitario e $t = 0$ l'istante di apertura del tasto; il circuito equivalente è mostrato in Fig. 1.

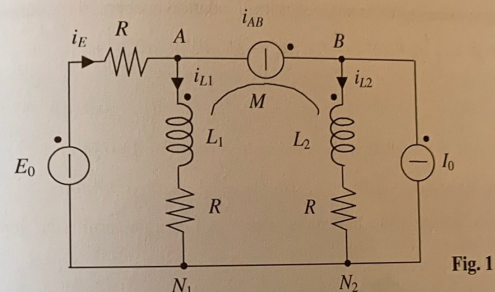


Fig. 1

Poiché la tensione ai capi del generatore di corrente i_{AB} risulta

$$v_{AB}(t) = -9 \cdot 10^{-3} \delta(t) - 15 u(t) - 5 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) u(t) \text{ V, } \tau = 50 \mu s$$

l'energia assorbita dal ramo AB nell'intervallo temporale $[0^-, t]$, $t > 0$ è data da

$$W_{AB}(0^-, t) = \int_{0^-}^t v_{AB}(\tau) i_{AB}(\tau) d\tau = \int_{0^-}^t 9 \cdot 10^{-3} \delta(\tau) u(-\tau) d\tau = \int_{0^-}^t 9 \cdot 10^{-3} \delta(-\tau) u(\tau) d\tau =$$

$$= 9 \cdot 10^{-3} \left[\frac{1}{2} u^2(\tau) \right]_{0^-}^t = 4,5 \text{ mJ}$$

essendo

$$\delta(-t) = \delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

In particolare tale energia è assorbita nell'istante di apertura del tasto essendo

$$W_{AB}(0^-, t) = W_{AB}(0^-, 0^+).$$

Considerato l'intervallo temporale infinitesimo $[0^-, 0^+]$, l'analisi energetica che segue mostra che questo risultato e quelli ottenuti nell'Esercizio 4.1.6 sono in accordo con il principio di conservazione dell'energia.

In particolare si valuta l'energia erogata dai generatori di tensione e di corrente E_0 , I_0 , l'energia elettromagnetica accumulata e l'energia dissipata nei resistori e si effettua il bilancio energetico tenendo conto di $W_{AB}(0^-, 0^+)$.

Si ha che

$$i_{L1}(t) = i_{L1}(0^-)u(-t) + \frac{E_0}{2R} [1 - \exp(-t/\tau)]u(t)$$

$$i_{L2}(t) = i_{L2}(0^-)u(-t) + I_0 u(t)$$

da cui

$$i_{L1}(0^-) = 1 \text{ A}, i_{L1}(0^+) = 0,$$

$$i_{L2}(0^-) = 1 \text{ A}, i_{L2}(0^+) = 2 \text{ A}$$

La variazione di energia elettromagnetica negli induttori accoppiati risulta pertanto

$$W_{L12}(0^-, 0^+) = \left[\frac{1}{2} L_1 i_{L1}^2(0^+) + \frac{1}{2} L_2 i_{L2}^2(0^+) + M i_{L1}(0^+) i_{L2}(0^+) \right] +$$

$$- \left[\frac{1}{2} L_1 i_{L1}^2(0^-) + \frac{1}{2} L_2 i_{L2}^2(0^-) + M i_{L1}(0^-) i_{L2}(0^-) \right] = 20 \cdot 10^{-3} - 6,5 \cdot 10^{-3} = 13,5 \text{ mJ}.$$

Per il principio di Kirchhoff applicato al nodo A (cfr. Fig. 1) si ha che

$$i_E(t) = i_{L1}(t) + i_{AB}(t) = [i_{L1}(0^-) + I_{AB}]u(-t) + \frac{E_0}{2R} [1 - \exp(-t/\tau)]u(t);$$

poiché tale la corrente risulta limitata in ampiezza, l'energia fornita dal generatore di tensione è nulla

$$W_{E0}(0^-, 0^+) = \int_{0^-}^{0^+} E_0 i_E(\tau) d\tau = 0$$

e per lo stesso motivo (correnti limitate in ampiezza) è nulla l'energia complessivamente dissipata nei tre resistori presenti nel circuito

$$W_R(0^-, 0^+) = \int_{0^-}^{0^+} R i_E^2(\tau) d\tau + \int_{0^-}^{0^+} R i_{L1}^2(\tau) d\tau + \int_{0^-}^{0^+} R i_{L2}^2(\tau) d\tau = 0.$$

Per quanto riguarda infine l'energia erogata dal generatore di corrente si ha che (cfr. Fig. 1)

$$v_{BN2}(t) = L_2 \frac{di_{L2}(t)}{dt} + M \frac{di_{L1}(t)}{dt} + R i_{L2}(t)$$

da cui

$$W_{I0}(0^-, 0^+) = \int_{0^-}^{0^+} v_{BN2}(\tau) I_0 d\tau = L_2 [I_0 - i_{L2}(0^-)] I_0 + M [-i_{L1}(0^-)] I_0 = 18 \text{ mJ}.$$

Avendo determinato le energie associate ai differenti componenti del circuito di Fig. 1 è possibile verificare che il principio di conservazione dell'energia è soddisfatto, così come deve essere, anche nell'intervallo temporale infinitesimo $[0^-, 0^+]$; si ha infatti che:

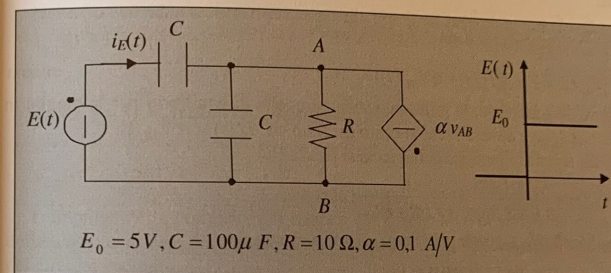
$$W_{I0}(0^-, 0^+) + W_{E0}(0^-, 0^+) = W_{L12}(0^-, 0^+) + W_R(0^-, 0^+) + W_{AB}(0^-, 0^+).$$

In particolare, l'energia erogata dal generatore di corrente I_0 (18 mJ) è in parte accumulata come energia elettromagnetica negli induttori mutuamente accoppiati (13,5 mJ) ed in parte dissipata nel ramo contenente il tasto T (4,5 mJ). Per quanto precedentemente visto, nell'intervallo $[0^-, 0^+]$ il generatore E_0 non eroga né assorbe energia così come i resistori non assorbono energia.



4.1.8 - Maglia impropria

Il circuito di figura si intende a regime per $t < 0$. Determinare la corrente $i_E(t)$ per $t \geq 0$.



Il circuito trasformato di Laplace, utilizzato per studiare il transitorio dovuto alla variazione di $E(t)$, è mostrato in Fig. 1; il circuito non ha generatori di condizioni iniziali poiché per $t < 0$ il circuito è a regime con $E(t) = 0$ ed i condensatori sono quindi scarichi.

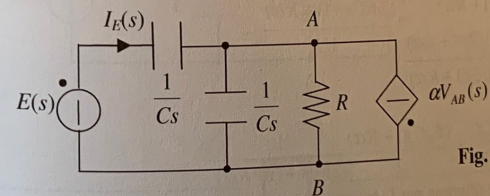


Fig. 1

Definendo con

$$Z_p(s) = \frac{R}{1 + RCs}$$

l'impedenza equivalente al parallelo tra il resistore ed il condensatore posto tra i nodi A, B, il circuito $\mathcal{L}$ -trasformato può essere ridisegnato come in Fig. 2.

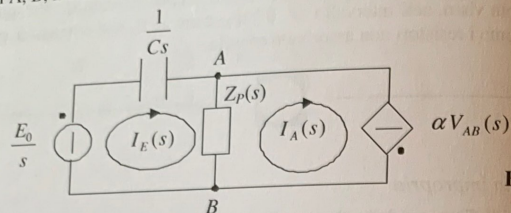


Fig. 2

Utilizzando il metodo delle correnti di maglia vale il seguente sistema di equazioni

$$\begin{cases} \frac{E_0}{s} = \left[\frac{1}{Cs} + Z_p(s) \right] I_E(s) - Z_p(s) \alpha V_{AB}(s) \\ V_{AB}(s) = Z_p(s) [I_E(s) - \alpha V_{AB}(s)] \end{cases}$$

dove, in particolare, la prima equazione è quella di equilibrio per la maglia in cui scorre $I_E(s)$ e dove si è tenuto conto del fatto che $I_A(s) = \alpha V_{AB}(s)$.

Dalla seconda equazione del sistema si ricava che

$$V_{AB}(s) = \frac{Z_p(s) I_E(s)}{1 + \alpha Z_p(s)} = \frac{R}{1 + \alpha R + RCs} I_E(s)$$

e, sostituendo $V_{AB}(s)$ nella prima equazione, si ricava che

$$I_E(s) = E_0 C \frac{RCs + (1 + R\alpha)}{2RCs + (1 + R\alpha)}$$

L'espressione ottenuta per $I_E(s)$ è un rapporto tra polinomi in s di grado 1; occorre quindi eseguire la divisione tra numeratore e denominatore prima di applicare la regola di espansione in frazioni semplici.

Applicando la regola di Ruffini per eseguire la divisione

$$\begin{array}{r} RCs + (1 + R\alpha) \quad | \quad 2RCs + (1 + R\alpha) \\ - 2RCs - (1/2)(1 + R\alpha) \quad \quad \quad 1/2 \\ \hline (1/2)(1 + R\alpha) \end{array}$$

si ha che

$$I_E(s) = \frac{E_0 C}{2} + \frac{(E_0 C)(1 + R\alpha)}{2} \frac{1}{2RCs + (1 + R\alpha)}$$

L'espressione ottenuta per $I_E(s)$ può direttamente essere antitrasformata. Definendo la costante di tempo

$$\tau_0 = \frac{2RC}{1 + R\alpha} = 1 \text{ ms}$$

si ha che

$$I_E(s) = \frac{E_0 C}{2} + \frac{(E_0 C)}{2} \frac{1}{\tau_0 s + (1/\tau_0)}$$

da cui

$$i_E(t) = \frac{E_0 C}{2} \delta(t) + \left[\frac{E_0 C}{2} \frac{1}{\tau_0} \exp(-t/\tau_0) \right] u(t) = 0,25 \cdot 10^{-3} \delta(t) + 0,25 \exp(-t/\tau_0) \text{ A};$$

da osservare la presenza della funzione impulsiva $\delta(t)$ nella forma d'onda ottenuta per la corrente erogata dal generatore.

Approfondimento (*)

Nel circuito è presente una maglia impropria costituita dal generatore di tensione e dai due condensatori. Le grandezze di stato, e cioè le tensioni ai capi dei condensatori, possono quindi essere discontinue in corrispondenza dell'istante $t = 0$ in cui si ha la variazione di $E(t)$.

Nel caso considerato, con riferimento alla Fig. 3, si che

$$v_{C1}(0^-) = v_{C2}(0^-) = 0$$

mentre

$$v_{C1}(0^+) = \frac{1}{C} \int_{0^-}^{0^+} i_E(t) dt = \frac{E_0}{2} \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) dt = \frac{E_0}{2},$$

$$v_{C2}(0^+) = E(0^+) - v_{C1}(0^+) = \frac{E_0}{2}.$$

L'impulso nella corrente $i_E(t)$ erogata dal generatore e la variazione istantanea della tensione ai capi dei condensatori sono peraltro risultati congruenti dell'analisi del circuito eseguita.

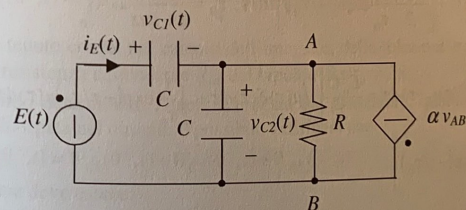


Fig. 3

4.1.9 (*) - Approfondimento. Analisi energetica relativa all'Es. 4.1.8

Utilizzando i risultati ottenuti nell'Esercizio A.8 si esegua l'analisi energetica del transitorio dovuto alla variazione di $E(t)$ valutando, nell'intervallo temporale $[0^-, t]$, $t > 0$, l'energia erogata dal generatore, l'energia elettromagnetica immagazzinata e quella dissipata nel circuito.

Nella analisi che segue si fa riferimento alla Fig. 1 di seguito mostrata; poiché il bipolo AB non ha elementi reattivi, l'energia erogata dal generatore è in parte accumulata come energia elettromagnetica nei due condensatori ed in parte ceduta e quindi dissipata nel bipolo AB stesso.

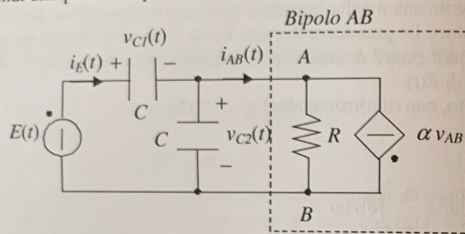


Fig. 1

L'energia $W_g(0^-, t)$ erogata dal generatore di tensione nell'intervallo temporale $[0^-, t]$, $t > 0$ si calcola integrando in tale intervallo la potenza istantanea $E(t)i_E(t)$ erogata dal generatore stesso dove

$$E(t) = E_0 u(t),$$

$$i_E(t) = \frac{E_0 C}{2} \delta(t) + \left[\frac{E_0 C}{2} \frac{1}{\tau_0} \exp(-t/\tau_0) \right] u(t), \quad \tau_0 = \frac{2RC}{1 + R\alpha}.$$

Si ha che

$$W_g(0^-, t) = \int_{0^-}^t E(\tau) i_E(\tau) d\tau = \frac{E_0^2 C}{2} \left[\int_{0^-}^t u(\tau) \delta(\tau) d\tau + \int_{0^-}^t \frac{1}{\tau_0} \exp(-\tau/\tau_0) u(\tau) d\tau \right] = \frac{E_0^2 C}{2} \left[\frac{3}{2} - \exp(-t/\tau_0) \right]$$

essendo, per $t > 0$,

$$\int_{0^-}^t u(\tau) \delta(\tau) d\tau = \int_{0^-}^t u(\tau) \frac{du(\tau)}{d\tau} d\tau = \left[\frac{1}{2} u^2(\tau) \right]_{0^-}^t = \frac{1}{2},$$

$$\int_{0^-}^t \frac{1}{\tau_0} \exp(-\tau/\tau_0) u(\tau) d\tau = \int_{0^+}^t \frac{1}{\tau_0} \exp(-\tau/\tau_0) u(\tau) d\tau = \int_{0^+}^t \frac{1}{\tau_0} \exp(-\tau/\tau_0) d\tau = [-\exp(-\tau/\tau_0)]_{0^+}^t = 1 - \exp(-t/\tau_0).$$

Poiché prima dell'apertura del tasto i condensatori sono scarichi si ha che l'energia elettromagnetica immagazzinata nell'intervallo temporale considerato è data da

$$W_{C1}(0^-, t) = \frac{1}{2} C v_{C1}^2(t), \quad W_{C2}(0^-, t) = \frac{1}{2} C v_{C2}^2(t)$$

dove le tensioni ai capi dei condensatori risultano

$$v_{C1}(t) = v_{C1}(0^-) + \frac{1}{C} \int_{0^-}^t i_E(\tau) d\tau = \frac{E_0}{2} [2 - \exp(-t/\tau_0)] u(t),$$

$$v_{C2}(t) = E(t) - v_{C1}(t) = \frac{E_0}{2} \exp(-t/\tau_0) u(t);$$

in particolare la Fig. 2 mostra l'andamento temporale delle tensioni $E(t)$, $v_{C1}(t)$, $v_{C2}(t)$ evidenziandone la discontinuità per $t = 0$.

Per valutare l'energia dissipata nel circuito è utile sostituire al bipolo passivo AB (cfr. Fig. 1) la sua resistenza equivalente R_{AB} . Tale resistenza può essere calcolata a partire dal I principio di Kirchhoff applicato al nodo A; si ha infatti che

$$i_{AB} = \frac{v_{AB}}{R} + \alpha v_{AB} \quad \text{da cui} \quad R_{AB} = \frac{v_{AB}}{i_{AB}} = \frac{R}{1 + R\alpha}.$$

L'energia dissipata nel circuito nell'intervallo $[0^-, t]$, $t > 0$, si calcola quindi integrando in tale intervallo di tempo la potenza istantanea

$$P_{AB}(t) = v_{AB}(t) i_{AB}(t) = \frac{v_{AB}^2(t)}{R_{AB}} = \frac{v_{C2}^2(t)}{R_{AB}}$$

assorbita dal bipolo AB.

Si ha che

$$W_{AB}(0^-, t) = \int_{0^-}^t P_{AB}(\tau) d\tau = \frac{C E_0^2}{4} [1 - \exp(-2t/\tau_0)] u(t)$$

avendo tenuto conto, nel calcolo dell'integrale, della relazione tra costante di tempo τ_0 e resistenza equivalente R_{AB} del bipolo AB: $\tau_0 = 2R_{AB}C$.

Avendo determinato l'energia erogata dal generatore, quella immagazzinata e quella dissipata nel circuito è possibile verificare che

$$W_g(0^-, t) = W_{C1}(0^-, t) + W_{C2}(0^-, t) + W_{AB}(0^-, t)$$

così come deve essere.

In particolare all'istante $t \rightarrow 0^+$ risulta

$$W_g(0^-, 0^+) = \frac{E_0^2 C}{4},$$

$$W_{C1}(0^-, 0^+) = W_{C2}(0^-, 0^+) = \frac{E_0^2 C}{8},$$

$$W_{AB}(0^-, 0^+) = 0$$

ovvero l'energia istantaneamente erogata dal generatore è immagazzinata in parti uguali nei due condensatori.

Per $t \rightarrow +\infty$ si ha invece che

$$W_E(0^-, t) \rightarrow \frac{3}{4} E_o^2 C, \quad W_{C1}(0^-, t) \rightarrow \frac{1}{2} E_o^2 C,$$

$$W_{C2}(0^-, t) \rightarrow 0, \quad W_{AB}(0^-, t) \rightarrow \frac{1}{4} E_o^2 C$$

ovvero dell'energia complessivamente fornita dal generatore 2/3 sono disponibili sotto forma di energia elettromagnetica immagazzinata nel condensatore C_1 mentre 1/3 è stato dissipato dal bipolo AB.

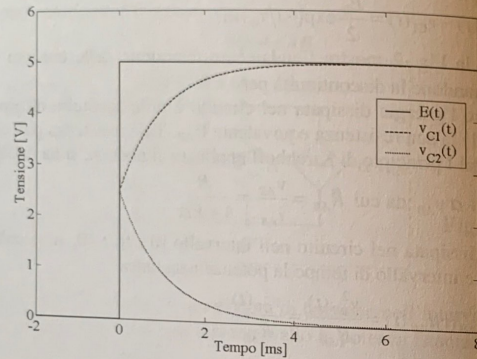
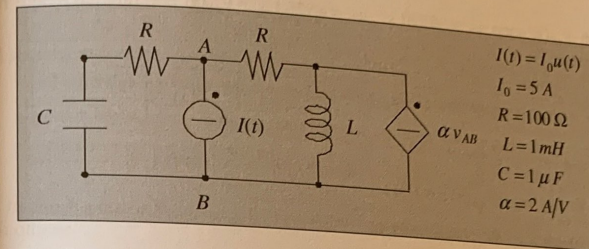


Fig. 2

4.2 SEZIONE B – ESERCIZI CON TRACCIA DELLA SOLUZIONE

4.2.1 – Metodo delle correnti di maglia

Il circuito di figura si intende a regime per $t < 0$. Determinare la tensione $v_{AB}(t)$ per $t \geq 0$.



Si utilizza il metodo di Laplace per determinare $v_{AB}(t)$ per $t \geq 0$. Poiché per $t < 0$ il circuito è a regime con $I(t) = 0$, si ha che all'istante $t = 0^-$ il condensatore è scarico e nell'induttore non scorre corrente. Il circuito $\mathcal{L}$ -trasformato è pertanto quello mostrato in Fig. 1, avendo tenuto conto che $I(s) = \mathcal{L}[I(t)] = I_0/s$. Nella Fig. 1 sono indicate anche le correnti di maglia monocorda utilizzate per risolvere, applicando il metodo delle correnti di maglia, il circuito.

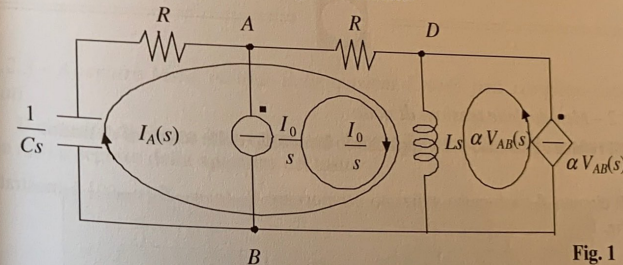


Fig. 1

Avendo scelto come rami d'albero il ramo AD ed il ramo induttivo, l'unica corrente incognita è $I_A(s)$ in quanto la corrente I_0/s è nota e la corrente $\alpha V_{AB}(s)$ è funzione di $I_A(s)$ essendo

$$V_{AB}(s) = -[R + 1/(Cs)] I_A(s).$$

L'equazione risolutiva risulta pertanto

$$\left(\frac{1}{Cs} + 2R + Ls \right) I_A(s) + (R + Ls) \frac{I_0}{s} - Ls \alpha \left(R + \frac{1}{Cs} \right) I_A(s) = 0$$

da cui segue che

$$I_A(s) = -\frac{Cs(R+Ls)}{(1-\alpha R)LCs^2 + (2RC - \alpha L)s + 1} \frac{I_0}{s},$$

$$V_{AB}(s) = \frac{(1+RCs)(R+Ls)}{(1-\alpha R)LCs^2 + (2RC - \alpha L)s + 1} \frac{I_0}{s} = \frac{500}{s} \frac{10^{-9}s^2 + 1,1 \cdot 10^{-4}s + 1}{-1,99 \cdot 10^{-7}s^2 - 1,8 \cdot 10^{-3}s + 1}$$

I poli di $V_{AB}(s)$ sono $s_{p1} \approx -9570 \text{ s}^{-1}$, $s_{p2} \approx +525,1 \text{ s}^{-1}$; $V_{AB}(s)$ può dunque essere scritta come

$$V_{AB}(s) = \frac{500}{s} \frac{10^{-9}s^2 + 1,1 \cdot 10^{-4}s + 1}{-1,99 \cdot 10^{-7}(s - s_{p1})(s - s_{p2})} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s - s_{p1}} + \frac{C}{s - s_{p2}}$$

dove

$$A = \lim_{s \rightarrow 0} s V_{AB}(s) = 500 \text{ V},$$

$$B = \lim_{s \rightarrow s_{p1}} (s - s_{p1}) V_{AB}(s) = -1,01 \text{ V},$$

$$C = \lim_{s \rightarrow s_{p2}} (s - s_{p2}) V_{AB}(s) = -501,5 \text{ V}.$$

La tensione $v_{AB}(t)$ è dunque

$$v_{AB}(t) = \mathcal{L}^{-1}[V_{AB}(s)] = [500 - 1,01 \exp(-9570t) - 501,5 \exp(525,1t)] u(t) \text{ V}.$$

Da osservare che essendo $s_{p2} > 0$ il circuito assegnato è instabile; in particolare il termine $-501,5 \exp(525,1t) u(t)$ della risposta del circuito all'ingresso $I(t)$ risulta, al crescere di t , divergente.



4.2.2 – Metodo delle tensioni di nodo

Si risolva l'Esercizio 4.2.1 applicando il metodo delle tensioni di nodo.

Il circuito $\mathcal{L}$ -trasformato utilizzato per ricavare $V_{AB}(s) = \mathcal{L}[v_{AB}(t)]$ è mostrato in Fig. 1.

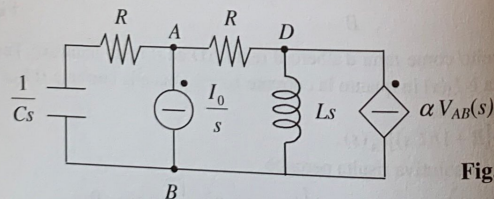


Fig. 1

Nel circuito non compaiono generatori di condizioni iniziali in quanto per ipotesi il circuito è a regime per $t < 0$ con $I(t) = 0$; si è inoltre tenuto conto che $I(s) = \mathcal{L}[I(t)] = I_0/s$.

Scelto il nodo B come nodo di riferimento, si determina $V_A(s) \equiv V_{AB}(s)$, $V_D(s) \equiv V_{DB}(s)$ applicando il metodo delle tensioni di nodo. Vale il seguente sistema di equazioni

$$\begin{cases} V_A(s) \left[\frac{1}{R + 1/(Cs)} + \frac{1}{R} \right] - V_D(s) \frac{1}{R} = \frac{I_0}{s} \\ V_D(s) \left(\frac{1}{Ls} + \frac{1}{R} \right) - V_A(s) \frac{1}{R} = \alpha V_A(s) \end{cases}$$

Il sistema può essere riscritto come

$$\begin{cases} \left[\frac{1 + 2RCs}{R(1 + RCs)} \right] V_A(s) - \frac{1}{R} V_D(s) = \frac{I_0}{s} \\ - \left(\frac{1 + R\alpha}{R} \right) V_A(s) + \left(\frac{R + Ls}{RLs} \right) V_D(s) = 0 \end{cases}$$

e risolto rispetto a $V_A(s)$.

Si ottiene

$$V_A(s) \equiv V_{AB}(s) = \frac{(1 + RCs)(R + Ls)}{(1 - \alpha R)LCs^2 + (2RC - \alpha L)s + 1} \frac{I_0}{s},$$

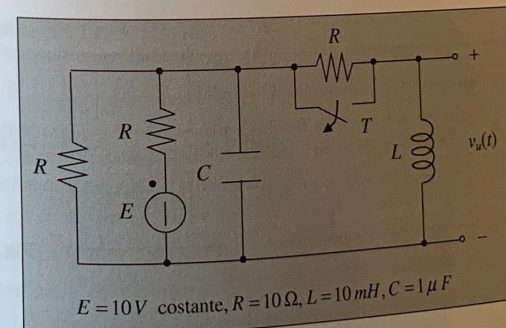
risultato ovviamente coincidente, per ciò che riguarda $V_{AB}(s)$, con quello ottenuto in nell'Esercizio 4.2.1 applicando il metodo delle correnti di maglia.

Per il calcolo dell'antitrasformata di $V_{AB}(s)$ si veda tale esercizio.



4.2.3 – Apertura tasto, metodo delle tensioni di nodo, poli complessi coniugati

Il circuito di figura è a regime con il tasto T chiuso. Determinare la tensione $v_u(t)$ a seguito della apertura del tasto.



$E = 10 \text{ V}$ costante, $R = 10 \Omega$, $L = 10 \text{ mH}$, $C = 1 \mu \text{ F}$

Si suppone che il tasto T sia aperto all'istante $t = 0$. Il circuito equivalente per il calcolo delle condizioni iniziali è mostrato in Fig. 1 da cui si ricava che $i_L(0^-) = E/R = 1 \text{ A}$, $v_C(0^-) = v_u(0^-) = 0$.

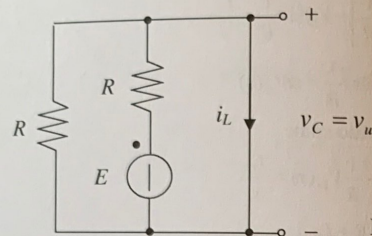


Fig. 1

Ne segue che il circuito $\mathcal{L}$ - trasformato da considerare per il calcolo di $V_u(s)$ ha un solo generatore di condizione iniziale così come mostrato in Fig. 2.

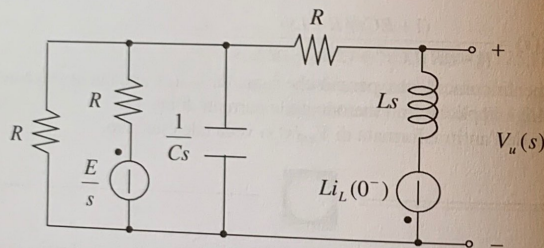


Fig. 2

Sostituendo in tale circuito l'equivalente Norton ai due generatori di tensione con in serie rispettivamente l'impedenza R e l'impedenza Ls , si ha il circuito equivalente per il calcolo di $V_u(s)$ mostrato in Fig. 3.

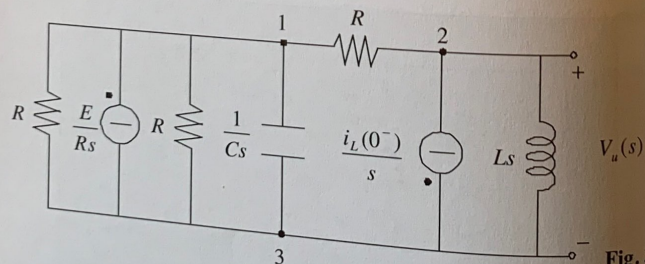


Fig. 3

Applicando nel circuito di Fig. 3 il metodo delle tensioni di nodo ed assumendo il nodo 3 come nodo di riferimento si ottiene il sistema nelle incognite $V_1 \equiv V_{13}$, $V_2 \equiv V_{23} \equiv V_u$

$$\begin{cases} \frac{E}{Rs} = V_1(s) \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R} + Cs \right) - V_2(s) \frac{1}{R} \\ -\frac{i(0^-)}{s} = V_2(s) \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{Ls} \right) - V_1(s) \frac{1}{R} \end{cases}$$

Risolvendo il sistema rispetto a $V_2(s)$ si ha che

$$V_u(s) = V_2(s) = -L \frac{R^2 C i(0^-) s + [3R i(0^-) - E]}{RLCs^2 + (2L + R^2 C)s + 3R} = -10^{-2} \frac{10^{-3}s + 20}{10^{-6}s^2 + 3 \cdot 10^{-2}s + 3 \cdot 10^2}$$

I poli di $V_u(s)$ risultano complessi coniugati:

$$s_{p1} \approx -1,5 \cdot 10^4 - j8,66 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}, \quad s_{p2} = s_{p1}^* = -1,5 \cdot 10^4 + j8,66 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}.$$

Scrivendo la trasformata di Laplace della tensione di uscita come

$$V_u(s) = \frac{A}{s - s_{p1}} + \frac{B}{s - s_{p2}}$$

si ha che anche le costanti A, B sono complesse coniugate; in particolare risulta

$$A = \lim_{s \rightarrow s_{p1}} (s - s_{p1}) V_u(s) = -5 - j2,887 \text{ V},$$

$$B = \lim_{s \rightarrow s_{p2}} (s - s_{p2}) V_u(s) = A^* = -5 + j2,887 \text{ V}.$$

Ponendo

$$A = M + jN = -5 - j2,887 \text{ V}, \quad s_{p1} = \sigma + j\omega = -1,5 \cdot 10^4 - j8,66 \cdot 10^3$$

si ha che (cfr. M. Raugi, *Lezioni di Elettrotecnica*, Edizioni Plus, esempio 5.4, pag. 183)

$$\begin{aligned} v_2(t) &= 2 \exp(\sigma t) [M \cos(\omega t) - N \sin(\omega t)] = \\ &= 2 \exp(-1,5 \cdot 10^4 t) [-5 \cos(8,66 \cdot 10^3 t) - 2,887 \sin(8,66 \cdot 10^3 t)] \text{ V}. \end{aligned}$$

Approfondimento (*)

Si verificano i valori limite di $v_u(t)$:

$$v_u(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} v_u(t) = A + B = -10 \text{ V}; \text{ tale valore è in accordo con quanto si ot-}$$

tiene applicando il II principio di Kirchhoff alla maglia comprendente il condensatore C , la resistenza R e l'induttore L (cfr. Fig. 1) ed imponendo la continuità delle grandezze di stato v_C, i_L ; si ha infatti che

$$v_C(0^+) = R i_L(0^+) + v_u(0^+) \text{ da cui, essendo}$$

$$v_C(0^+) = v_C(0^-) = 0, \quad i_L(0^+) = i_L(0^-) = 1 \text{ A},$$

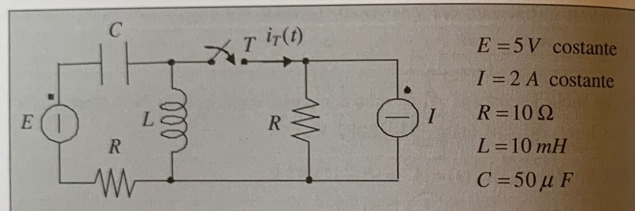
si ricava che $v_u(0^+) = -10 \text{ V}$;

$\lim_{t \rightarrow +\infty} v_u(t) = 0$ in accordo con il fatto che il circuito assegnato è stabile essendo composto da soli elementi passivi: esaurito il transitorio dovuto all'apertura del tasto T, il circuito va a regime con l'eccitazione $E(t) = 10V$ costante; ne segue che a regime tutte le grandezze del circuito sono costanti nel tempo ed in particolare $v_u(t) = L di_L/dt = 0$.



4.2.4 - Trasformata di Laplace con poli complessi coniugati

Il circuito si intende a regime con il tasto T aperto. Determinare $i_T(t)$ a seguito della chiusura del tasto.



Si suppone che il tasto sia chiuso all'istante $t = 0$. All'istante $t = 0^-$ il circuito è equivalente a quello mostrato in Fig. 1 dove

$$v_C(0^-) = E = 5V, i_L(0^-) = 0.$$

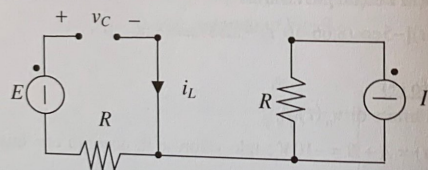


Fig. 1

Il circuito $\mathcal{L}$ -trasformato da considerare per il calcolo di $I_T(s)$ è pertanto quello mostrato in Fig. 2; tale circuito può essere semplificato tenendo conto che i due generatori di tensione in serie si annullano essendo $v_C(0^-) = E$. Per il calcolo della corrente $I_T(s)$ può dunque essere considerato il circuito equivalente di Fig. 3 dove

$$Z_P(s) = [R + 1/(Cs)] \parallel (Ls) = \frac{Ls(1 + RCs)}{LCs^2 + RCs + 1}.$$

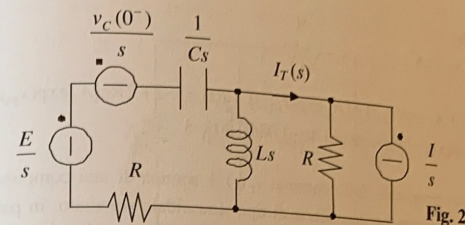


Fig. 2

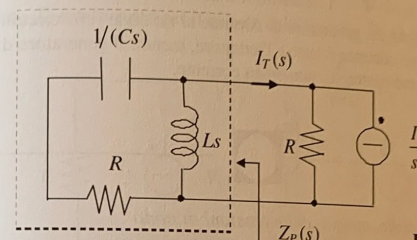


Fig. 3

Applicando la regola del partitore di corrente si ha che

$$I_T(s) = -\frac{R}{R + Z_P(s)} \frac{I}{s} = -\frac{I}{s} \frac{LCs^2 + RCs + 1}{2LCs^2 + (RC + L/R)s + 1} = -\frac{2 \cdot 5 \cdot 10^{-7} s^2 + 5 \cdot 10^{-4} s + 1}{s \cdot 10^{-6} s^2 + 1,5 \cdot 10^{-3} s + 1}$$

La funzione $I_T(s)$ ha un polo nell'origine e due poli complessi coniugati

$$s_{p1} = -750 - j661,4 s^{-1}, s_{p2} = -750 + j661,4 s^{-1};$$

la sua espansione in termini frazionari semplici risulta pertanto

$$I_T(s) = \frac{A_0}{s} + \frac{A_1}{s - s_{p1}} + \frac{A_2}{s - s_{p2}}$$

dove

$$A_0 = \lim_{s \rightarrow 0} s I_T(s) = -2A,$$

$$A_1 = \lim_{s \rightarrow s_{p1}} (s - s_{p1}) I_T(s) = 0,5 + j0,945 = 1,07 \exp(j1,084) A,$$

$$A_2 = \lim_{s \rightarrow s_{p2}} (s - s_{p2}) I_T(s) = 0,5 - j0,945 = 1,07 \exp(-j1,084) A.$$

Si ha che

$$i_T(t) = \mathcal{L}^{-1}[I_T(s)] = -2u(t) + A_1 \exp(s_{p1}t)u(t) + A_2 \exp(s_{p2}t)u(t).$$

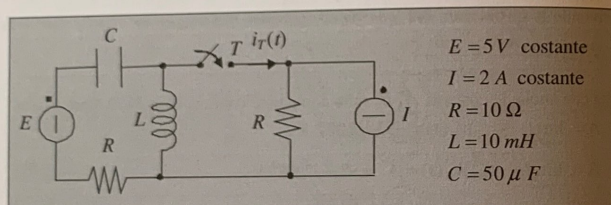
La corrente che scorre nel tasto a seguito della sua chiusura è una grandezza fisica; in particolare $i_T(t)$ è una funzione a valori reale del tempo.

$\lim_{t \rightarrow \infty} v_u(t) = 0$ in accordo con il fatto che il circuito assegnato è stabile essendo composto da soli elementi passivi: esaurito il transitorio dovuto all'apertura del tasto T, il circuito va a regime con l'eccitazione $E(t) = 10V$ costante; ne segue che a regime tutte le grandezze del circuito sono costanti nel tempo ed in particolare $v_u(t) = L di_L/dt = 0$.



4.2.4 - Trasformata di Laplace con poli complessi coniugati

Il circuito si intende a regime con il tasto T aperto. Determinare $i_T(t)$ a seguito della chiusura del tasto.



Si suppone che il tasto sia chiuso all'istante $t = 0$. All'istante $t = 0^-$ il circuito è equivalente a quello mostrato in Fig. 1 dove

$$v_C(0^-) = E = 5V, i_L(0^-) = 0.$$

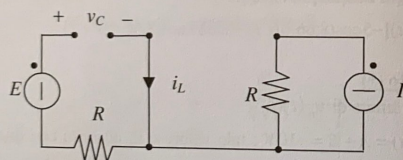


Fig. 1

Il circuito $\mathcal{L}$ -trasformato da considerare per il calcolo di $I_T(s)$ è pertanto quello mostrato in Fig. 2; tale circuito può essere semplificato tenendo conto che i due generatori di tensione in serie si annullano essendo $v_C(0^-) = E$. Per il calcolo della corrente $I_T(s)$ può dunque essere considerato il circuito equivalente di Fig. 3 dove

$$Z_p(s) = [R + 1/(Cs)] \parallel (Ls) = \frac{Ls(1 + RCs)}{LCs^2 + RCs + 1}.$$

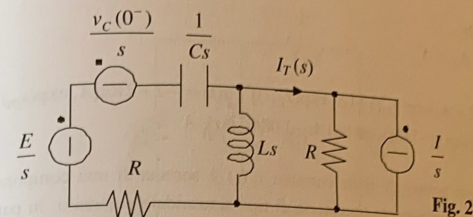


Fig. 2

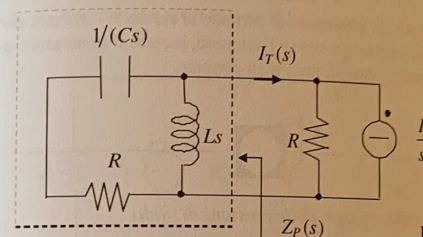


Fig. 3

Applicando la regola del partitore di corrente si ha che

$$I_T(s) = -\frac{R}{R + Z_p(s)} \frac{I}{s} = -\frac{I}{s} \frac{LCs^2 + RCs + 1}{2LCs^2 + (RC + L/R)s + 1} = -\frac{2 \cdot 5 \cdot 10^{-7} s^2 + 5 \cdot 10^{-4} s + 1}{s \cdot 10^{-6} s^2 + 1,5 \cdot 10^{-3} s + 1}.$$

La funzione $I_T(s)$ ha un polo nell'origine e due poli complessi coniugati

$$s_{p1} = -750 - j661,4 s^{-1}, s_{p2} = -750 + j661,4 s^{-1};$$

la sua espansione in termini frazionari semplici risulta pertanto

$$I_T(s) = \frac{A_0}{s} + \frac{A_1}{s - s_{p1}} + \frac{A_2}{s - s_{p2}}$$

dove

$$A_0 = \lim_{s \rightarrow 0} s I_T(s) = -2A,$$

$$A_1 = \lim_{s \rightarrow s_{p1}} (s - s_{p1}) I_T(s) = 0,5 + j0,945 = 1,07 \exp(j1,084) A,$$

$$A_2 = \lim_{s \rightarrow s_{p2}} (s - s_{p2}) I_T(s) = 0,5 - j0,945 = 1,07 \exp(-j1,084) A.$$

Si ha che

$$i_T(t) = \mathcal{L}^{-1}[I_T(s)] = -2u(t) + A_1 \exp(s_{p1}t) u(t) + A_2 \exp(s_{p2}t) u(t).$$

La corrente che scorre nel tasto a seguito della sua chiusura è una grandezza fisica; in particolare $i_T(t)$ è una funzione a valori reale del tempo.

Osservando che

$$s_{p2} = s_{p1}^*, A_2 = A_1^*$$

risulta

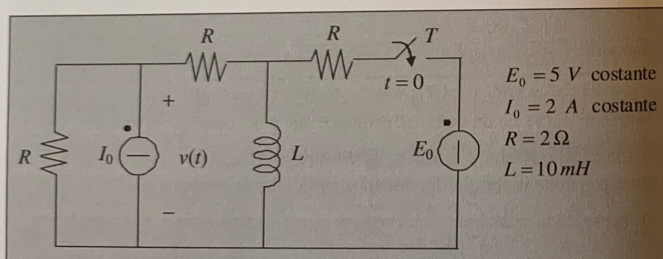
$$i_T(t) = \{-2 + A_1 \exp(s_{p1}t) + [A_1 \exp(s_{p2}t)]^*\} u(t) = [-2 + 2 \operatorname{Re}\{A_1 \exp(s_{p1}t)\}] u(t) = [-2 + 2,14 \exp(-750t) \cos(661,4t - 1,084)] u(t) \text{ A}$$

L'andamento temporale della corrente $i_T(t)$ è somma di una componente costante e di una componente transitoria di tipo sinusoidale smorzato; in particolare per $t \rightarrow +\infty$ si ha $i_T(t) \rightarrow -2 \text{ A}$: esaurito il transitorio dovuto alla chiusura del tasto la corrente erogata dal generatore di corrente si richiude (cfr. circuito assegnato) attraverso il ramo contenente il tasto e l'induttore, mentre il generatore di tensione, che ha in serie il condensatore C, non eroga corrente.



4.2.5 - Chiusura tasto, metodo delle tensioni di nodo

Il circuito di figura si suppone a regime per $t < 0$. Determinare l'andamento nel tempo della tensione $v(t)$ ai capi del generatore I_0 dopo la chiusura del tasto T all'istante $t = 0$.



All'istante $t = 0^-$ il circuito assegnato è equivalente a quello mostrato in Fig. 1 dove l'induttore, equivalente ad un cortocircuito, è percorso dalla corrente

$$i_L(0^-) = \frac{I_0}{2} = 1 \text{ A.}$$

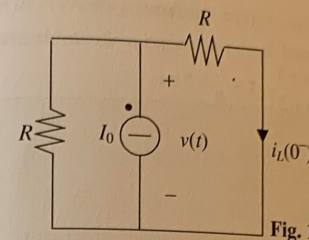


Fig. 1

Il circuito $\mathcal{L}$ -trasformato per il calcolo della tensione $V(s)$ è mostrato in Fig. 2.

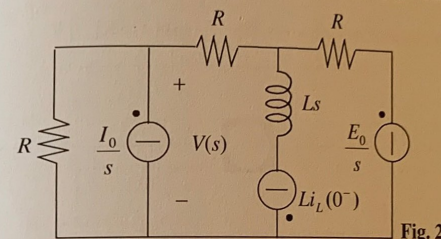


Fig. 2

Utilizzando l'equivalente di Norton per i rami contenenti i generatori non ideali di tensione tale calcolo può essere eseguito nel circuito equivalente di Fig. 3.

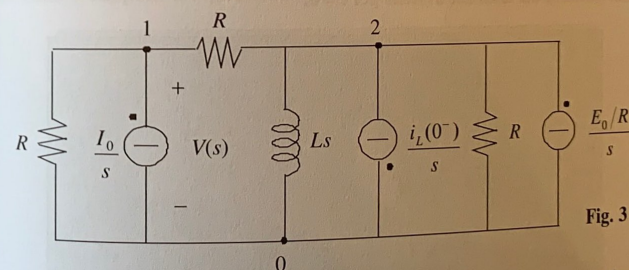


Fig. 3

Applicando il metodo delle tensioni di nodo, assumendo il nodo 0 come nodo di riferimento, vale il seguente sistema

$$\begin{cases} \frac{I_0}{s} = V_1(s) \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R} \right) - V_2(s) \frac{1}{R} \\ -\frac{i_L(0^-)}{s} + \frac{E_0/R}{s} = -V_1(s) \frac{1}{R} + V_2(s) \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{Ls} + \frac{1}{R} \right) \end{cases}$$

dove $V_1(s) \equiv V_{10}(s) = V(s)$, $V_2(s) \equiv V_{20}(s)$.

Si ha che

$$V(s) = V_1(s) = \frac{1}{s} \frac{11s + 4}{3s + 2}, \quad \tau = \frac{L}{R} = 5 \text{ ms}.$$

Posto

$$V(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s - s_{p1}}, \quad s_{p1} = -\frac{2}{3\tau} \equiv -133,3 \text{ s}^{-1}$$

le costanti A, B risultano

$$A = \lim_{s \rightarrow 0} sV(s) = 2 \text{ V}, \quad B = \lim_{s \rightarrow s_{p1}} (s - s_{p1}) V(s) = \frac{5}{3} \equiv 1,67 \text{ V}$$

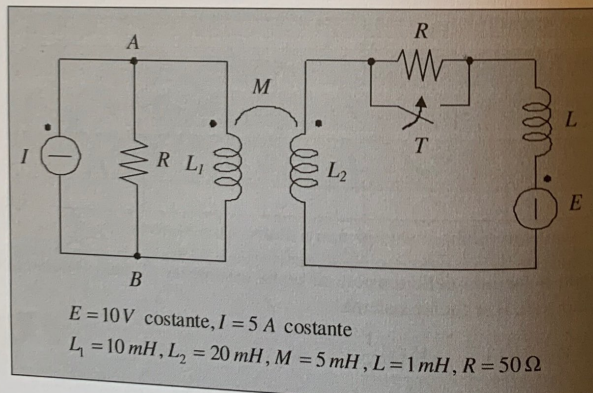
da cui antitrasformando si ottiene $v(t) = [2 + 1,67 \exp(-133,3 t)] \text{ V}$



4.3 SEZIONE C – ESERCIZI DA SVOLGERE

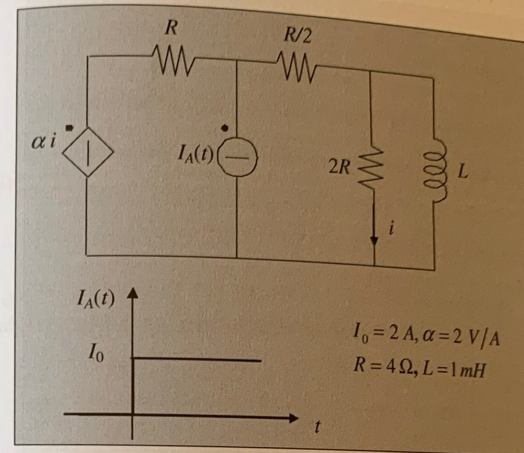
4.3.1 – Chiusura tasto

Il circuito è a regime con il tasto T aperto. Determinare $v_{AB}(t)$ a seguito della chiusura del tasto che avviene per $t = 0$.



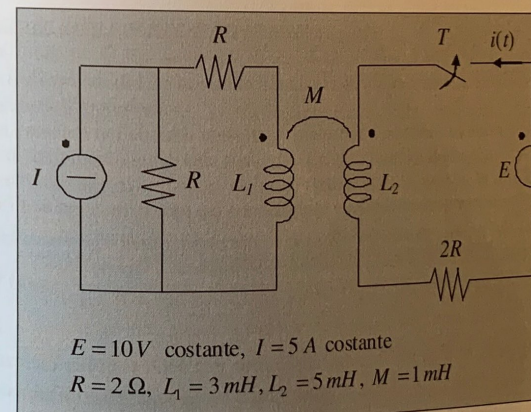
4.3.2 – Generatore di corrente a gradino

Il circuito di figura si intende a regime per $t < 0$. Determinare l'andamento di $i(t)$.



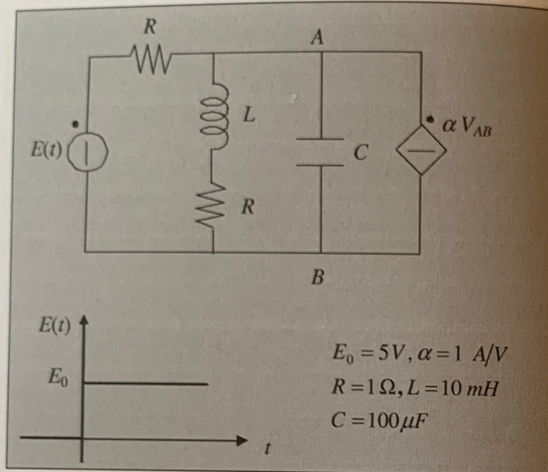
4.3.3 – Chiusura tasto

Determinare l'andamento della corrente $i(t)$ dopo la chiusura del tasto T. Il circuito si suppone a regime con il tasto T aperto.



4.3.4 – Generatore di tensione a gradino

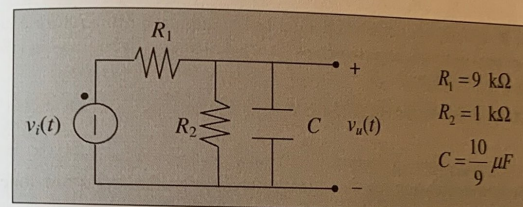
Determinare la tensione $V_{AB}(t)$ per $t > 0$ con il circuito a regime per $t < 0$.

RAPPRESENTAZIONE
INGRESSO USCITA DI UN CIRCUITO

5.1 SEZIONE A – ESERCIZI SVOLTI

5.1.1 – Funzione di trasferimento con 1 polo, diagramma di Bode (componente, asintotico, esatto)

Si determini la funzione di trasferimento del circuito mostrato in figura e si disegni il relativo diagramma di Bode di ampiezza e fase.

Calcolo della funzione di trasferimento

La funzione di trasferimento $W(s)$ di un circuito è per definizione il rapporto tra le trasformate di Laplace della grandezza di uscita e della grandezza di ingresso calcolate nell'ipotesi che:

sia presente nel circuito un solo generatore indipendente di tensione o di corrente il cui andamento temporale costituisce la grandezza di ingresso;

il circuito si trovi inizialmente nello stato nullo ovvero con le correnti negli induttori e le tensioni ai capi dei condensatori eventualmente presenti nulle.

Nel caso considerato, posto $V_i(s) = \mathcal{L}[v_i(t)]$, $V_u(s) = \mathcal{L}[v_u(t)]$, si ha che

$$W(s) = \frac{V_u(s)}{V_i(s)};$$

in particolare, il calcolo di $W(s)$ si effettua considerando il circuito $\mathcal{L}$ -trasformato di Fig. 1 dove, per definizione stessa di $W(s)$, non c'è un generatore di condizione iniziale associato al condensatore.

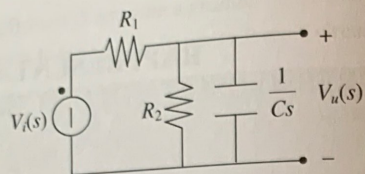


Fig. 1

Posto

$$Z_p(s) = R_2 \parallel \frac{1}{Cs} = \frac{R_2}{1 + R_2 Cs}$$

ed applicando la regola del partitore di tensione si ha che

$$V_u(s) = \frac{Z_p(s)}{Z_p(s) + R_1} V_i(s)$$

da cui segue che

$$W(s) = \frac{Z_p(s)}{Z_p(s) + R_1} = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + R_1 R_2 Cs} = \frac{1000}{10000 + 10s} = \frac{100}{1000 + s}$$

La funzione di trasferimento ottenuta non ha zeri in quanto il numeratore è costante e presenta un polo di valore negativo

$$s_p = -\omega_p, \omega_p = 1000 \text{ rad/s}$$

tale da annullare il denominatore di $W(s)$.

Disegno del diagramma di Bode

I diagrammi di Bode richiesti sono la rappresentazione grafica della funzione

$$W(j\omega) = W(s) \Big|_{s=j\omega} = \frac{100}{1000 + j\omega}$$

ottenuta dalla funzione di trasferimento del circuito ponendo $s = j\omega$.

$W(j\omega)$ è una funzione di variabile reale ω e a valori complessi; nei diagrammi di Bode se ne rappresenta il modulo (diagramma di ampiezza) e la fase (diagramma di fase).

In particolare, il modulo è espresso in dB ovvero come

$$|W(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} |W(j\omega)|;$$

inoltre sia il modulo $|W(j\omega)|_{dB}$ che la fase $\angle W(j\omega)$ sono rappresentati nei diagrammi in scala logaritmica, ossia in funzione di $\log_{10}(\omega)$.

Per facilitare il tracciamento dei diagrammi è utile esprimere $W(j\omega)$ nella cosiddetta forma di Bode.

In generale la forma di Bode della funzione $W(j\omega)$ si ottiene esprimendo la funzione stessa come

$$W(j\omega) = H \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)}$$

dove H è una costante reale mentre $N(j\omega)$, $D(j\omega)$ sono prodotti di polinomi nella variabile $j\omega$ di grado minore o uguale a due, ciascuno dei quali è caratterizzato dall'avere il termine noto uguale a 1. Nel caso considerato, mettendo in evidenza a denominatore il termine costante si ha

$$W(j\omega) = \frac{100}{1000 + j\omega} = \frac{1}{10} \frac{1}{(1 + j\omega/1000)}$$

ossia $H = 1/10$, $N(j\omega) = 1$, $D(j\omega) = 1 + j\omega/1000$.

La forma di Bode della funzione $W(j\omega)$ è utile perché permette di esprimere la funzione stessa come prodotto di termini standardizzati per ciascuno dei quali è noto il diagramma di Bode.

Ancora nel caso considerato si ha

$$W(j\omega) = H A_p(j\omega) \text{ dove } H = \frac{1}{10}, A_p(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega/\omega_p}, \omega_p \cong 1000 \text{ rad/s}.$$

Ne segue che

$$|W(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} |H A_p(j\omega)| = 20 \log_{10} |H| + 20 \log_{10} |A_p(j\omega)|$$

$$= |H|_{dB} + |A_p(j\omega)|_{dB}$$

$$\angle W(j\omega) = \angle [H A_p(j\omega)] = \angle H + \angle A_p(j\omega)$$

ovvero sia il diagramma di ampiezza che il diagramma di fase della funzione $W(j\omega)$ possono essere ottenuti come somma dei diagrammi di ampiezza e di fase dei termini H , $A_p(j\omega)$.

In particolare per il termine costante si ha che

$$|H|_{dB} = 20 \log_{10} |H| = 20 \log_{10} (1/10) = -20, \angle H = 0.$$

Per il termine $A_p(j\omega)$, associabile al polo di $W(s)$, sono note le approssimazioni lineari a tratti (su scala logaritmica) $|\hat{A}_p(j\omega)|_{dB}$, $\angle \hat{A}_p(j\omega)$; tali approssimazioni sono dette asintotiche in quanto

$$|A_p(j\omega)|_{dB} \cong |\hat{A}_p(j\omega)|_{dB},$$

$$\angle A_p(j\omega) \cong \angle \hat{A}_p(j\omega)$$

per $\omega \ll \omega_p$ e per $\omega \gg \omega_p$.

La Fig. 2, relativa al diagramma di ampiezza, mostra i diagrammi di $|H|_{dB}$, $|\hat{A}_p(j\omega)|_{dB}$ (diagrammi componenti), la loro somma (diagramma asintotico) ed il diagramma di $|W(j\omega)|_{dB}$ (diagramma effettivo).

Con le stesse notazioni, la Fig. 3, relativa al diagramma di fase, mostra $\angle H$, $\angle \hat{A}_p(j\omega)$, la loro somma e il diagramma effettivo $\angle W(j\omega)$.

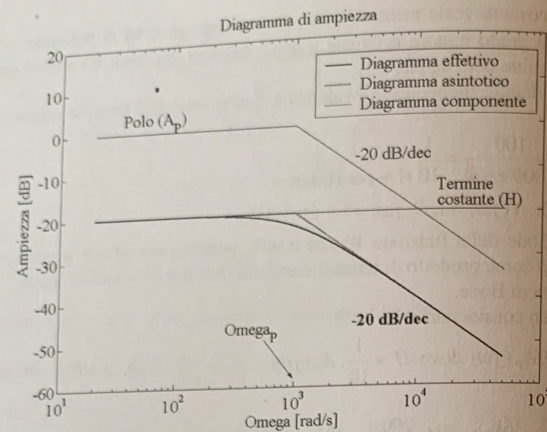


Fig. 2

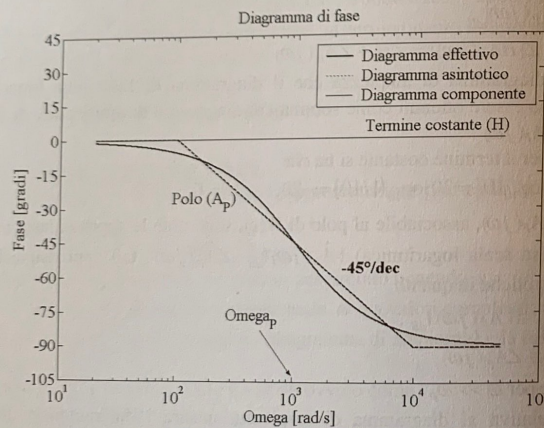


Fig. 3

Approfondimento (*)

Si considera nuovamente l'espressione

$$W(j\omega) = \frac{100}{1000 + j\omega} = HA_p(j\omega),$$

$$H = \frac{1}{10}, A_p(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega/\omega_p}, \quad \omega_p = 1000 \text{ rad/s},$$

e si determina sia l'espressione esatta che quella asintotica di $|W(j\omega)|_{dB}$ e $\angle W(j\omega) = \angle H + \angle A_p(j\omega)$.

Espressione esatta di $|W(j\omega)|_{dB}$, $\angle W(j\omega)$

Per quanto riguarda il termine costante, si ha che

$$|H|_{dB} = 20 \log_{10} |H| = 20 \log_{10} (1/10) = -20, \quad \angle H = 0.$$

Per il termine $A_p(j\omega)$ risulta invece

$$|A_p(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_p)^2}} \right) = -20 \log_{10} \sqrt{1 + (\omega/\omega_p)^2},$$

$$\angle A_p(j\omega) = -\arctg(\omega/\omega_p).$$

Espressione asintotica di $|W(j\omega)|_{dB}$, $\angle W(j\omega)$

Per il termine costante H valgono le espressioni esatte precedentemente definite.

Per $A_p(j\omega)$ modulo e fase sono approssimati dalla funzione $\hat{A}_p(j\omega)$ tale che

$$|\hat{A}_p(j\omega)|_{dB} = \begin{cases} 0 & \text{se } \omega < \omega_p \\ -20 \log_{10}(\omega/\omega_p) & \text{se } \omega \geq \omega_p \end{cases}$$

$$\angle \hat{A}_p(j\omega) = \begin{cases} 0 & \text{se } \omega < 0,1\omega_p \\ -45^\circ - 45^\circ \log_{10}(\omega/\omega_p) & \text{se } 0,1\omega_p \leq \omega \leq 10\omega_p \\ -90^\circ & \text{se } \omega > 10\omega_p \end{cases}$$

Si osservi come la funzione $\hat{A}_p(j\omega)$ approssimi la funzione $A_p(j\omega)$ per valori di ω piccoli e grandi rispetto ad ω_p . Poiché

$$\sqrt{1 + (\omega/\omega_p)^2} \cong \begin{cases} 1 & \text{se } \omega \ll \omega_p \\ \omega/\omega_p & \text{se } \omega \gg \omega_p \end{cases}, \quad \arctg(\omega/\omega_p) \cong \begin{cases} 0 & \text{se } \omega \ll \omega_p \\ 90^\circ & \text{se } \omega \gg \omega_p \end{cases}$$

si ha infatti che

$$|A_p(j\omega)|_{dB} \cong |\hat{A}_p(j\omega)|_{dB}, \quad \angle A_p(j\omega) \cong \angle \hat{A}_p(j\omega) \quad \text{se } \omega \ll \omega_p \text{ oppure se } \omega \gg \omega_p$$

Nel punto $\omega = \omega_p$ risulta invece

$$|A_p(j\omega_p)|_{dB} - |\hat{A}_p(j\omega_p)|_{dB} = -3 \text{ dB}, \quad \angle A_p(j\omega_p) = \angle \hat{A}_p(j\omega_p) = -45^\circ.$$

Da notare, infine, che i diagrammi di Bode di $\hat{A}_p(j\omega)$ possono essere tracciati su scala logaritmica in maniera relativamente semplice essendo costituiti da segmenti di retta.

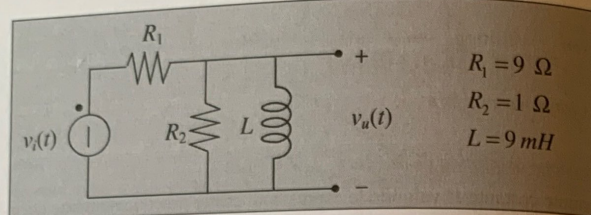
La variabile indipendente utilizzata nei diagrammi di Bode è $\log_{10} \omega$ essendo i diagrammi in scala logaritmica; così, considerato ad esempio il diagramma di ampiezza, l'equazione

$$|\hat{A}_p(j\omega)|_{dB} = -20 \log_{10}(\omega/\omega_p) = -20 \log_{10} \omega + 20 \log_{10} \omega_p, \quad \omega \geq \omega_p$$

definisce il segmento di retta con origine nel punto $(\log_{10} \omega_p, 0)$ e con pendenza -20 dB/dec .

5.1.2 - Funzione di trasferimento con 1 polo e 1 zero nell'origine; diagrammi di Bode

Per il circuito mostrato in figura determinare la funzione di trasferimento; disegnare quindi il relativo diagramma di Bode di ampiezza e fase.



Calcolo della funzione di trasferimento

Il circuito $\mathcal{L}$ -trasformato da utilizzare per il calcolo della funzione di trasferimento $W(s) = V_u(s)/V_i(s)$ è mostrato in Fig. 1; nel circuito non c'è un generatore di condizione iniziale associato all'induttore in quanto per definizione la funzione di trasferimento deve essere calcolata a partire dal circuito scarico.

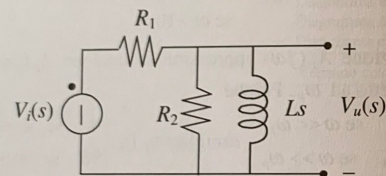


Fig. 1

Applicando la regola del partitore di tensione si ha che

$$V_u(s) = \frac{Z_p(s)}{Z_p(s) + R_1} V_i(s) \quad \text{dove } Z_p(s) = R_2 \parallel Ls = \frac{R_2 Ls}{R_2 + Ls};$$

ne segue che

$$W(s) = \frac{Z_p(s)}{Z_p(s) + R_1} = \frac{R_2 Ls}{R_1 R_2 + (R_1 + R_2) Ls} = \frac{s}{1000 + 10s}.$$

La funzione di trasferimento ottenuta ha uno zero nell'origine in quanto il numeratore si annulla per $s=0$ e presenta un polo di valore negativo $s_p = -\omega_p$, $\omega_p = 100 \text{ rad/s}$ che annulla il denominatore di $W(s)$.

Disegno del diagramma di Bode

Per disegnare i diagrammi di Bode associati alla funzione

$$W(j\omega) = W(s)|_{s=j\omega} = \frac{j\omega}{1000 + j10\omega}$$

è utile partire dalla forma di Bode della funzione stessa cosicché questa possa essere espressa come prodotto di termini elementari di cui è noto il diagramma di ampiezza e di fase.

Nel caso considerato è sufficiente mettere in evidenza il termine noto nel polinomio a denominatore in modo che

$$W(j\omega) = \frac{j\omega}{1000 + j10\omega} = \frac{1}{1000} \cdot j\omega \cdot \frac{1}{1 + j\omega/100} = HA_Z(j\omega)A_P(j\omega)$$

$$\text{dove } H = \frac{1}{1000}, A_Z(j\omega) = j\omega, A_P(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega/\omega_p}, \omega_p = 100 \text{ rad/s}.$$

Le funzioni che definiscono i diagrammi di Bode di ampiezza e di fase possono pertanto essere espresse rispettivamente come

$$|W(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} |HA_Z(j\omega)A_P(j\omega)| = |H|_{dB} + |A_Z(j\omega)|_{dB} + |A_P(j\omega)|_{dB},$$

$$\angle W(j\omega) = \angle [HA_Z(j\omega)A_P(j\omega)] = \angle H + \angle A_Z(j\omega) + \angle A_P(j\omega);$$

in particolare, si ha che

$$|H|_{dB} = 20 \log_{10} |H| = 20 \log_{10} (1/1000) = -60, \quad \angle H = 0,$$

$$|A_Z(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} \omega, \quad \angle A_Z(j\omega) = \pi/2,$$

mentre per i termini $|A_P(j\omega)|_{dB}$, $\angle A_P(j\omega)$ sono le note approssimazioni asintotiche già mostrate nell'Esercizio 5.1.1.

I diagrammi di Bode di ampiezza e fase relativi alla funzione $W(j\omega)$ sono mostrati rispettivamente nelle Fig. 2, 3 (diagramma effettivo) insieme ai diagrammi dei termini componenti H , $A_Z(j\omega)$, $A_P(j\omega)$ (diagramma componente) ed alla loro somma (diagramma asintotico).

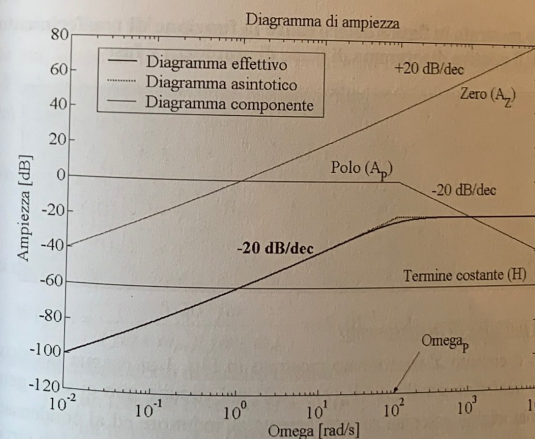


Fig. 2

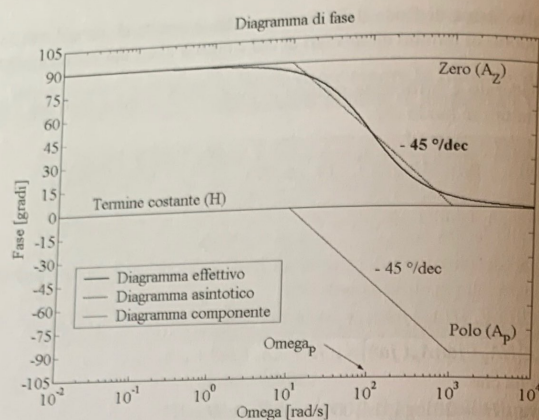
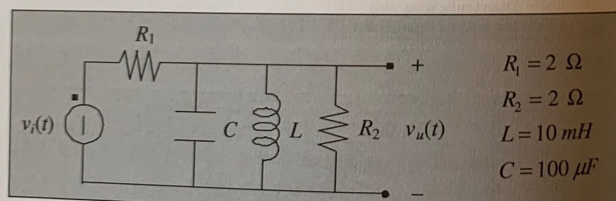


Fig. 3

5.1.3 – Funzione di trasferimento con 2 poli e 1 zero nell'origine; diagrammi di Bode

Per il circuito mostrato in figura determinare la funzione di trasferimento; disegnare quindi il relativo diagramma di Bode di ampiezza e fase.



Calcolo della funzione di trasferimento

Considerando il circuito $\mathcal{L}$ -trasformato mostrato in Fig. 1 si esegue il calcolo della funzione di trasferimento $W(s) = V_u(s)/V_i(s)$; nel circuito non ci sono generatori di condizioni iniziali associati rispettivamente all'induttore ed al condensatore in quanto la funzione di trasferimento deve essere calcolata nell'ipotesi di circuito nello stato zero.

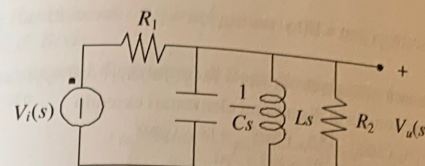


Fig. 1

Per la regola del partitore di tensione si ha che

$$V_u(s) = \frac{Z_p(s)}{Z_p(s) + R_1} V_i(s) \quad \text{dove } Z_p(s) = R_2 \parallel Ls \parallel \frac{1}{Cs} = \frac{R_2 Ls}{R_2 Ls^2 + Ls + R_2};$$

ne segue che

$$W(s) = \frac{Z_p(s)}{Z_p(s) + R_1} = \frac{R_2 Ls}{R_1 R_2 Ls^2 + (R_1 + R_2)Ls + R_1 R_2} = \frac{5 \cdot 10^3 s}{s^2 + 10^4 s + 10^6}.$$

La funzione di trasferimento ottenuta ha uno zero nell'origine in quanto il numeratore si annulla per $s = 0$ e due poli essendo il denominatore di grado 2.

Disegno del diagramma di Bode

Per disegnare i diagrammi di Bode associati alla funzione

$$W(j\omega) = W(s)|_{s=j\omega}$$

è utile partire dalla forma di Bode della funzione stessa in modo che questa possa espressa come prodotto di termini elementari di cui è noto il diagramma di ampiezza e di fase.

Nel caso considerato occorre preliminarmente determinare i poli di $W(s)$. Si ha che

$s^2 + 10^4 s + 10^6 = 0$ per $s_{p1} = -\omega_{p1} \equiv -10^2 \text{ rad/s}$, $s_{p2} = -\omega_{p2} \equiv -10^4 \text{ rad/s}$ da cui, essendo le radici reali, il polinomio di secondo grado al denominatore di $W(s)$ può essere scomposto nel prodotto due di polinomi di primo grado ciascuno dei quali ha una radice reale:

$$s^2 + 10^4 s + 10^6 = 1 \cdot (s - s_{p1})(s - s_{p2}) = (s + \omega_{p1})(s + \omega_{p2}).$$

Ne segue che

$$W(s) = \frac{5 \cdot 10^3 s}{s^2 + 10^4 s + 10^6} = \frac{5 \cdot 10^3 s}{(s + \omega_{p1})(s + \omega_{p2})}, \quad \omega_{p1} = 10^2 \text{ rad/s}, \quad \omega_{p2} = 10^4 \text{ rad/s}$$

da cui si ottiene la forma di Bode

$$W(j\omega) = \frac{5 \cdot 10^3 j\omega}{(j\omega + \omega_{p1})(j\omega + \omega_{p2})} = (5 \cdot 10^{-3}) \cdot j\omega \cdot \frac{1}{1 + j\omega/\omega_{p1}} \cdot \frac{1}{1 + j\omega/\omega_{p2}}$$

costituita dal prodotto di quattro termini:

- un termine costante $H = 5 \cdot 10^{-3}$;
- un termine $A_z(j\omega) = j\omega$ associato allo zero di $W(s)$;

due termini $A_{p_n}(j\omega) = 1/(1 + j\omega/\omega_{p_n})$, $n = 1, 2$ associati ai poli di $W(s)$.

In questo modo i diagrammi di Bode di $W(j\omega) = H A_Z(j\omega) A_{p1}(j\omega) A_{p2}(j\omega)$, possono essere ottenuti come somma di diagrammi elementari essendo

$$|W(j\omega)|_{dB} = |H|_{dB} + |A_Z(j\omega)|_{dB} + |A_{p1}(j\omega)|_{dB} + |A_{p2}(j\omega)|_{dB},$$

$$\angle W(j\omega) = \angle H + \angle A_Z(j\omega) + \angle A_{p1}(j\omega) + \angle A_{p2}(j\omega).$$

I diagrammi sono mostrati nelle Fig. 2, 3.

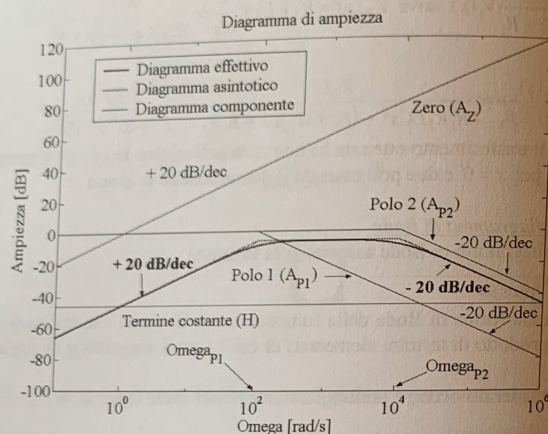


Fig. 2

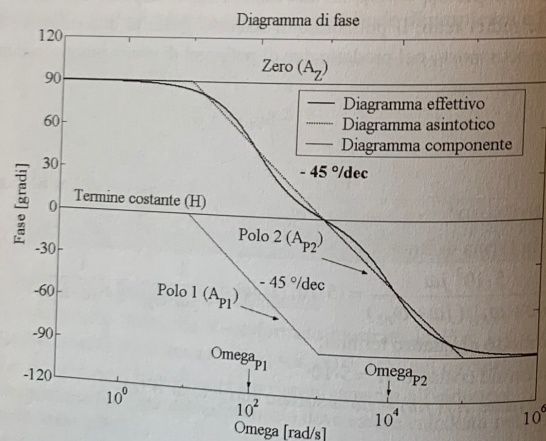


Fig. 3

5.1.4 - Funzione di trasferimento con poli e zeri complessi coniugati, diagrammi di Bode

Determinare i diagrammi di Bode di ampiezza e fase per la funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{s(s^2 + 10^4)}{(s^2 + 10s + 10^3)(s + 10^5)}.$$

Occorre preliminarmente determinare gli zeri ed i poli della funzione di trasferimento $W(s)$ ovvero i valori di s che ne annullano, rispettivamente, il numeratore (zeri) ed il denominatore (poli).

Zeri

$W(s)$ ha uno zero nell'origine e due zeri immaginari puri

$$s_{A1,2} = \pm j\omega_A, \omega_A = 10^2 \text{ rad/s}.$$

Poli

$W(s)$ ha un polo reale in

$$s_p = -\omega_p, \omega_p = 10^5 \text{ rad/s}$$

e due poli complessi coniugati a parte reale negativa

$$s_{B1,2} \approx -5 \pm j31,225 \text{ rad/s};$$

in particolare il polinomio le cui radici sono complesse coniugate può essere riscritto come

$$s^2 + 10s + 10^3 = s^2 + 2\xi\omega_B s + \omega_B^2$$

dove

$$\omega_B = 10\sqrt{10} \text{ rad/s}, \xi = \sqrt{10}/20 \approx 0,158$$

Tenendo conto dell'analisi dei poli e degli zeri appena eseguita, la funzione di trasferimento può essere riscritta come

$$W(s) = \frac{s(s^2 + \omega_A^2)}{(s^2 + 2\xi\omega_B s + \omega_B^2)(s + \omega_p)}.$$

Forma di Bode

La forma di Bode della funzione di rete

$$W(j\omega) = W(s)|_{s=j\omega}$$

si ottiene mettendo in evidenza i termini noti nei vari polinomi in cui è fattorizzata la funzione stessa.

Si ha che

$$W(j\omega) = H \frac{j\omega(1 - \omega^2/\omega_A^2)}{[(-\omega^2/\omega_B^2) + j2\xi(\omega/\omega_B) + 1](1 + j\omega/\omega_P)}$$

dove $H = \omega_A^2/(\omega_B^2\omega_P) = 10^{-4} \text{ (rad/s)}^{-1}$.

Diagrammi di Bode

Così come mostrato nelle Fig. 1, 2 i diagrammi di Bode di $W(j\omega)$ si ottengono sommando i diagrammi di Bode dei seguenti termini (diagrammi componenti):

- termine costante H ;
- termine $F_z(j\omega) = j\omega$, associato allo zero nell'origine della funzione di trasferimento;
- termine $F_A(j\omega) = 1 - \omega^2/\omega_A^2$, associato agli zeri complessi coniugati di $W(s)$;
- termine $F_B(j\omega) = 1/[-\omega^2/\omega_B^2 + j2\xi(\omega/\omega_B) + 1]$ associato ai poli complessi coniugati di $W(s)$;
- termine $F_P(j\omega) = 1/(1 + j\omega/\omega_P)$, associato al polo reale della funzione di trasferimento.

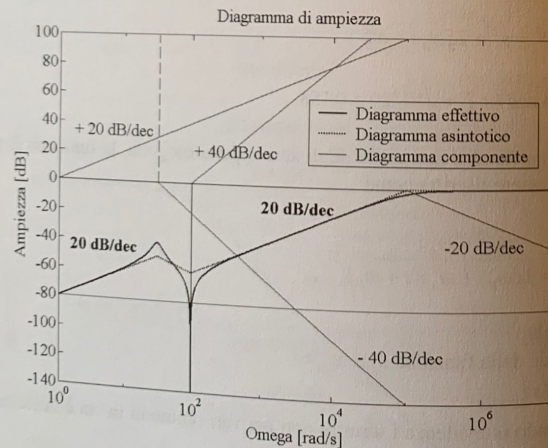


Fig. 1

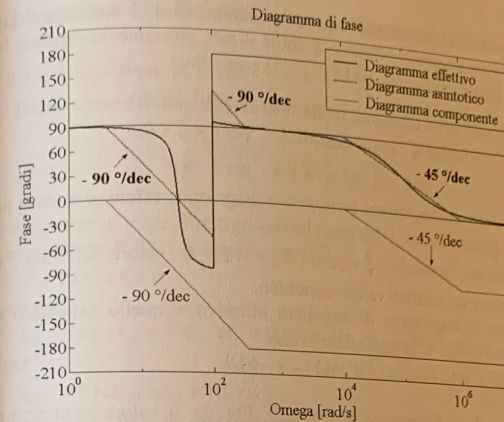


Fig. 2

Approfondimento(*)

È utile commentare i diagrammi relativi ai termini $F_A(j\omega)$, $F_B(j\omega)$.

Diagramma di $F_A(j\omega) = 1 - \omega^2/\omega_A^2$

Il diagramma asintotico di ampiezza del termine $F_A(j\omega)$ è costituito (cfr. Fig. 1) da due segmenti di retta con pendenza nulla per $\omega < \omega_A$ e con pendenza di $+40 \text{ dB/dec}$ per $\omega \geq \omega_A$; i due segmenti di retta si raccordano in $\omega = \omega_A = 10^2 \text{ rad/s}$. In corrispondenza di tale punto è tracciata anche una retta verticale a tratto continuo; la retta indica la presenza di un asintoto verticale per la funzione $|F_A(j\omega)|_{dB}$: per $\omega \rightarrow \omega_A$ si ha infatti che $|F_A(j\omega)|_{dB} \rightarrow -\infty$. Ne segue che il diagramma effettivo di $|F_A(j\omega)|_{dB}$ e, conseguentemente, il diagramma effettivo di $|W(j\omega)|_{dB}$ si discostano sensibilmente dai rispettivi diagrammi asintotici. Nella Fig. 1 lo scostamento tra il diagramma asintotico (tratteggiato) e quello effettivo (a tratto continuo) di $|W(j\omega)|_{dB}$ è evidente.

Il diagramma di fase asintotico e quello effettivo di $F_A(j\omega)$ risultano invece coincidenti. Si ha che $\angle F_A(j\omega) = 0$ per $\omega < \omega_A$, $\angle F_A(j\omega) = 180^\circ$ per $\omega > \omega_A$ mentre per $\omega = \omega_A$ la fase non è definita; in particolare, così come mostrato in Fig. 2, i diagrammi asintotici ed effettivi di $\angle F_A(j\omega)$, $\angle W(j\omega)$ risultano discontinui per $\omega = \omega_A$.

Diagramma di $F_B(j\omega) = 1/[-\omega^2/\omega_B^2 + j2\xi(\omega/\omega_B) + 1]$, $0 < \xi \leq 1$

Come nel caso precedentemente considerato, il diagramma asintotico di ampiezza del termine $F_B(j\omega)$ è costituito da tre segmenti di retta che si raccordano nel punto $\omega = \omega_B = 10\sqrt{10} \text{ rad/s}$ (cfr. Fig. 1). In questo caso però le rette hanno pendenza nulla e pendenza -40 dB/dec , mentre il segmento di retta verticale è stato

disegnato tratteggiato. Tale segmento indica un possibile sensibile scostamento tra il diagramma asintotico e quello effettivo. L'entità di tale scostamento dipende infatti dal valore di ξ essendo $F_B(j\omega_B) = 1/(j2\xi)$; in particolare

$$|F_B(j\omega_B)|_{dB} = -20 \log_{10}(2\xi) \text{ risulta } \begin{cases} \in [-6, 0] & \text{per } 0,5 \leq \xi \leq 1 \\ > 0 & \text{per } 0 < \xi < 0,5 \\ \rightarrow +\infty & \text{per } \xi \rightarrow 0^+ \end{cases}$$

ovvero lo scostamento tra diagramma asintotico e diagramma effettivo è tanto più grande quanto più piccolo è ξ .

Nel caso considerato, essendo $\xi = (\sqrt{10}/20) < 1/2$, il valore effettivo di $|F_B(j\omega_B)|_{dB}$ è maggiore del relativo valore asintotico.

Lo scostamento tra il diagramma di ampiezza effettivo e quello asintotico di $|W(j\omega)|_{dB}$ è mostrato in Fig. 1; in particolare si che

$$|W(j\omega_B)|_{dB} \equiv |HF_A(j\omega_B) F_Z(j\omega_B) F_B(j\omega_B)|_{dB} \approx -40,9.$$

Per quanto riguarda il diagramma di fase (cfr. Fig. 2), il valore asintotico di $\angle F_B(j\omega)$ è rappresentato da tre segmenti di retta con pendenza nulla per $\omega < 0,1\omega_B$ e per $\omega > 10\omega_B$ e con pendenza di $-90^\circ/\text{dec}$ per $0,1\omega_B \leq \omega \leq 10\omega_B$; i segmenti si raccordano nei punti $\omega = 0,1\omega_B$ e $\omega = 10\omega_B$. In altri termini, il diagramma asintotico di $\angle F_B(j\omega)$ coincide con quello di un polo reale doppio in ω_B , caso che effettivamente si verifica per $\xi = 1$.

Si può osservare che, indipendentemente dal valore di $\xi > 0$, si ha che $\angle F_B(j\omega_B) = -90^\circ$ mentre in un intorno di $\omega = \omega_B$ diagramma asintotico ed effettivo differiscono in modo tanto più significativo quanto più ξ è piccolo. A limite, per $\xi = 0$ il diagramma effettivo è rappresentato da un gradino di ampiezza 180° centrato in ω_B .



5.2 SEZIONE B - ESERCIZI CON TRACCIA DELLA SOLUZIONE

5.2.1 - Diagrammi di Bode

Determinare il diagramma di Bode di ampiezza e fase per la funzione

$$W(s) = -\frac{(s^2 + 100s + 5)(s^2 + 10^6)}{(s^2 + 10^2)(s + 20)^2}$$

Si determinano innanzitutto gli zeri ed i poli della funzione $W(s)$.

Il numeratore di $W(s)$ si annulla per

$$s^2 + 100s + 5 = 0$$

ossia per

$$s_{01} = -\omega_{01}, s_{02} = -\omega_{02}, \omega_{01} \approx 0,05 \text{ rad/s}, \omega_{02} \approx 99,95 \text{ rad/s}$$

e per

$$s_{03,4} = \pm j\omega_{0A}, \omega_{0A} = 10^3 \text{ rad/s};$$

in particolare, $W(s)$ ha due zeri reali negativi e due zeri immaginari puri complessi coniugati.

I poli della funzione $W(s)$ sono invece

$$s_{p1,2} = \pm j\omega_{pA}, \omega_{pA} = 10 \text{ rad/s}$$

e

$$s_{p3} = -\omega_{p1}, \omega_{p1} = 20 \text{ rad/s},$$

ovvero $W(s)$ ha due poli immaginari puri complessi coniugati ed un polo reale negativo doppio.

La forma di Bode della funzione assegnata risulta pertanto

$$W(j\omega) = H \frac{\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_{01}}\right) \left(1 + j\frac{\omega}{\omega_{02}}\right) \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{0A}^2}\right)}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{pA}^2}\right) \left(1 + j\frac{\omega}{\omega_{p1}}\right)^2}$$

dove

$$H = -\frac{\omega_{01}\omega_{02}\omega_{0A}^2}{\omega_{pA}^2\omega_{p1}^2} = -125.$$

I diagrammi di ampiezza e fase di $W(j\omega)$ sono mostrati, rispettivamente, nelle Fig. 1, 2 insieme ai diagrammi componenti e asintotici.

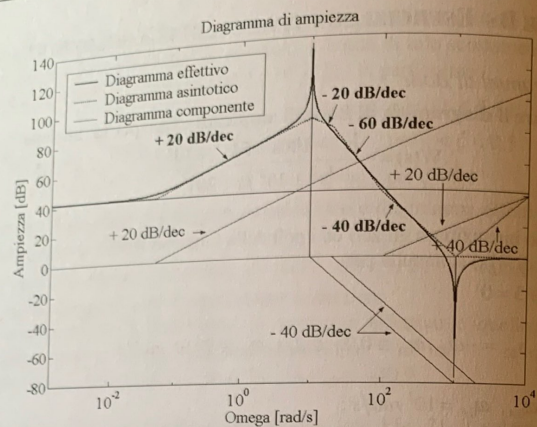


Fig. 1

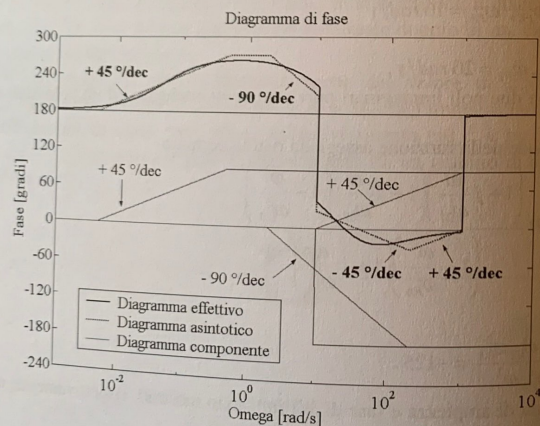


Fig. 2

5.2.2 - Diagrammi di Bode

Disegnare il diagramma di Bode di ampiezza e fase per la funzione

$$W(s) = \frac{s(s^2 + 40s + 4)}{(s^2 + 10^4)(s^2 + 2s + 10^2)}$$

La funzione $W(s)$ ha uno zero nell'origine $s_0 = 0$ e due zeri tali che

$$s^2 + 40s + 4 = 0$$

ossia

$$s_{01} = -\omega_{01}, s_{02} = -\omega_{02}, \omega_{01} \approx 0,1 \text{ rad/s}, \omega_{02} \approx 39,1 \text{ rad/s}.$$

I poli della funzione $W(s)$ sono invece dati da

$$s_{p1,2} = \pm j\omega_{pA}, \omega_{pA} = 100 \text{ rad/s}$$

e dai valori che annullano il polinomio

$$s^2 + 2s + 10^2$$

ossia

$$s_{p3,4} = -1 \pm j9,95.$$

La funzione $W(s)$ ha dunque due poli complessi coniugati immaginari puri e due poli complessi coniugati a parte reale negativa; in particolare, posto

$$\omega_{pB} = 10 \text{ rad/s},$$

$$2\omega_{pB}\xi = 2 \rightarrow \xi = 0,1$$

si ha che il polinomio al quale sono associati i poli a parte reale negativa può essere riscritto come

$$s^2 + 2s + 10^2 = s^2 + 2\omega_{pB}\xi s + \omega_{pB}^2.$$

La forma di Bode della funzione assegnata risulta pertanto

$$W(j\omega) = H \frac{j\omega \left(1 + j\frac{\omega}{\omega_{01}}\right) \left(1 + j\frac{\omega}{\omega_{02}}\right)}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{pA}^2}\right) \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{pB}^2} + j2\xi\frac{\omega}{\omega_{pB}}\right)}$$

dove

$$H = \frac{\omega_{01}\omega_{02}}{\omega_{pA}^2\omega_{pB}^2} = 4 \cdot 10^{-6} (\text{rad/s})^{-2}.$$

I diagrammi di ampiezza e fase di $W(j\omega)$ sono mostrati, rispettivamente, nelle Fig. 1, 2.

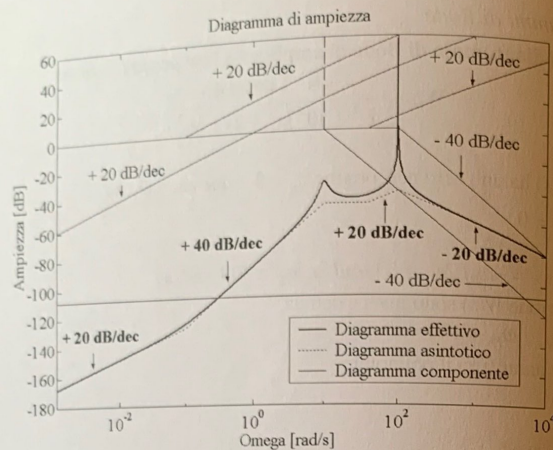


Fig. 1

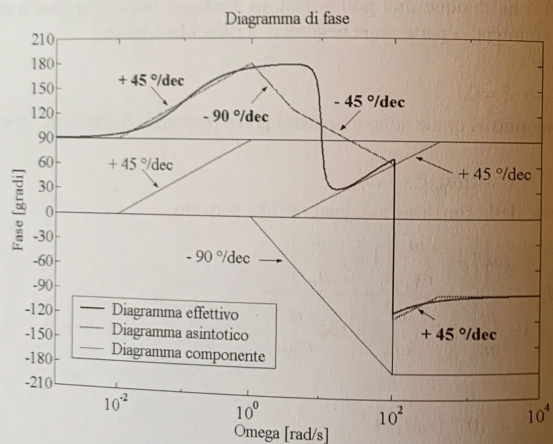


Fig. 2

5.2.3 - Diagrammi di Bode

Determinare il diagramma di Bode di ampiezza e fase per la funzione

$$W(s) = \frac{(s^2 + 2s + 2000)(s + 30)}{s(s^2 + 10^6)(s + 300)}$$

Il numeratore di $W(s)$ si annulla per

$$s_{01} = -\omega_{01}, \omega_{01} = 30 \text{ rad/s}$$

e per

$$s^2 + 2s + 2000 = 0.$$

Tale equazione può essere riscritta come

$$s^2 + 2\omega_{0A}\xi s + \omega_{0A}^2 = 0$$

dove

$$\omega_{0A} = \sqrt{2000} \cong 44,721 \text{ rad/s},$$

$$2\omega_{0A}\xi = 2 \rightarrow \xi = 1/\omega_{0A} \cong 0,022 < 1;$$

in particolare le radici risultano

$$s_{0A1,2} = \omega_{0A} \left(-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1} \right) \cong -1 \pm j44,710 \text{ rad/s}$$

Il denominatore della funzione $W(s)$ si annulla invece per $s_p = 0$,

$$s_{p1,2} = \pm j\omega_{pA}, \omega_{pA} = 10^3 \text{ rad/s} \text{ e } s_{p3} = -\omega_{p3}, \omega_{p3} = 300 \text{ rad/s}.$$

La funzione $W(s)$ ha pertanto uno zero reale negativo, due zeri complessi coniugati, un polo nell'origine, due poli complessi coniugati immaginari puri e un polo reale negativo.

La forma di Bode della funzione assegnata risulta pertanto

$$W(j\omega) = H \frac{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{0A}^2} + j2\omega_{0A}\xi \right) \left(1 + j\frac{\omega}{\omega_{01}} \right)}{j\omega \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{pA}^2} \right) \left(1 + j\frac{\omega}{\omega_{p3}} \right)}$$

$$\text{dove } H = \frac{\omega_{0A}^2 \omega_{01}}{\omega_{pA}^2 \omega_{p3}} = 2 \cdot 10^{-4}.$$

I diagrammi di ampiezza e fase di $W(j\omega)$ sono mostrati, rispettivamente, nelle Fig. 1, 2.

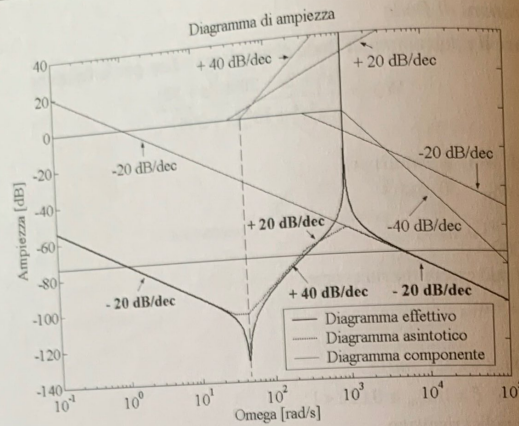


Fig. 1

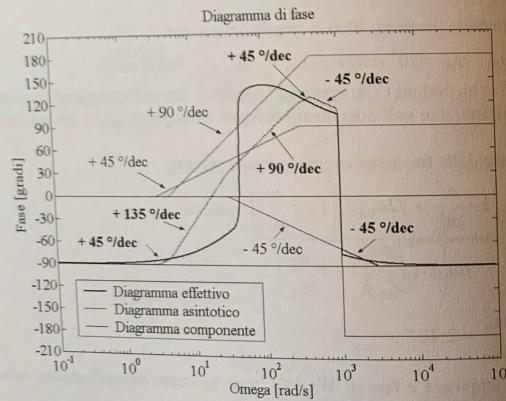


Fig. 2

5.2.4 - Diagrammi di Bode

Disegnare il diagramma di Bode di ampiezza e fase per la funzione di rete

$$W(s) = \frac{s(s^2 + 2 \cdot 10^4 s + 10^6)}{(s^2 + 10^4)(s^2 + 100s + 10^3)}$$

Il numeratore della funzione $W(s)$ si annulla per $s_0 = 0$ e per

$$s^2 + 2 \cdot 10^4 s + 10^6 = 0$$

ossia per

$$s_{01} = -\omega_{01}, s_{02} = -\omega_{02}, \omega_{01} = 50,13 \text{ rad/s}, \omega_{02} = 19949,87 \text{ rad/s};$$

$W(s)$ ha dunque uno zero nell'origine e due zeri reali negativi.

I poli della funzione $W(s)$ sono

$$s_p = \pm j\omega_{pA}, \omega_{pA} = 10^2 \text{ rad/s}$$

e

$$s_{p1} = -\omega_{p1}, s_{p2} = -\omega_{p2}, \omega_{p1} = 11,27 \text{ rad/s}, \omega_{p2} = 88,73 \text{ rad/s};$$

ovvero $W(s)$ ha due poli immaginari puri complessi coniugati e due poli reali negativi.

La forma di Bode della funzione assegnata risulta pertanto

$$W(j\omega) = H \frac{j\omega \left(1 + j\frac{\omega}{\omega_{01}}\right) \left(1 + j\frac{\omega}{\omega_{02}}\right)}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{pA}^2}\right) \left(1 + j\frac{\omega}{\omega_{p1}}\right) \left(1 + j\frac{\omega}{\omega_{p2}}\right)}$$

dove $H = \frac{\omega_{01}\omega_{02}}{\omega_{pA}^2\omega_{p1}\omega_{p2}} = 0,1$.

I diagrammi di ampiezza e fase di $W(j\omega)$ sono mostrati, rispettivamente, nelle Fig. 1, 2.

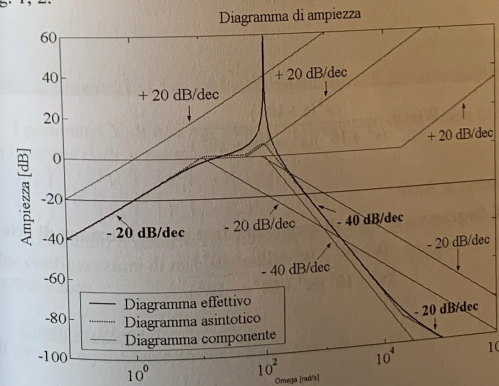


Fig. 1

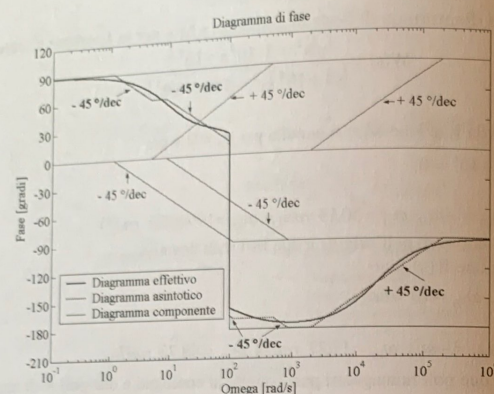


Fig. 2

5.3 SEZIONE C – ESERCIZI DA SVOLGERE

5.3.1 – Diagramma di Bode

Disegnare il diagramma di Bode di ampiezza e fase per la funzione di rete

$$W(s) = \frac{s^2(s + 10^3)}{(s^2 + 10^4)(s^2 + 10s + 10^8)}$$

5.3.2 – Diagramma di Bode

Disegnare il diagramma di Bode di ampiezza e fase per la funzione di rete

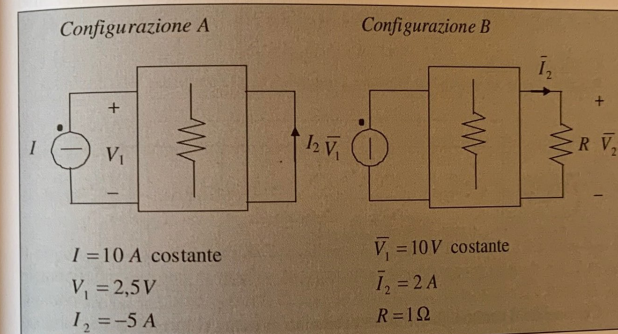
$$W(s) = \frac{(s + 10^2)^2(s^2 + 10s + 10^6)}{(s^2 + 10^8)(s^2 + 10^4s + 10^2)}$$

Capitolo 6 CIRCUITI A DUE PORTE

6.1 SEZIONE A – ESERCIZI SVOLTI

6.1.1 – Circuito resistivo, parametri Y, prove per la determinazione dei parametri equivalenti.

Si consideri una rete 2 porte lineare costituita da soli resistori. Vengono eseguite misure nelle due configurazioni mostrate in figura. Determinare i parametri Y della rete due porte.



I parametri Y di una rete due porte consentono di esprimere la correnti di porta in funzione delle tensioni di porta.

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = [Y] \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2 \\ Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2 \end{bmatrix}$$

Utilizzando il relativo circuito equivalente per descrivere la rete due porte nelle due configurazioni di misura considerate, è possibile determinare i parametri Y della rete stessa.

Configurazione A

Il circuito equivalente da considerare è mostrato in Fig. 1.

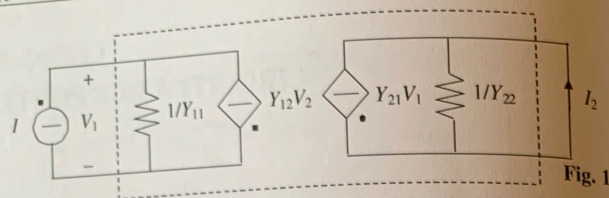


Fig. 1

Poiché $V_2 = 0$ si ha che il generatore dipendente di ingresso è equivalente ad un circuito aperto e che nel resistore in uscita non circola corrente ossia

$$V_1 = \frac{1}{Y_{11}} I \rightarrow Y_{11} = \frac{I}{V_1} = 4 \text{ A/V}, \quad I_2 = Y_{21} V_1 \rightarrow Y_{21} = \frac{I_2}{V_1} = -2 \text{ A/V}.$$

Da notare che il caso considerato corrisponde alla configurazione di misura dei parametri Y_{11} , Y_{21} .

Poiché la rete è per ipotesi resistiva, la matrice Y è simmetrica ossia risulta determinato anche il parametro

$$Y_{12} = Y_{21} = -2 \text{ A/V}.$$

Configurazione B

Il circuito equivalente da considerare è mostrato in Fig. 2.

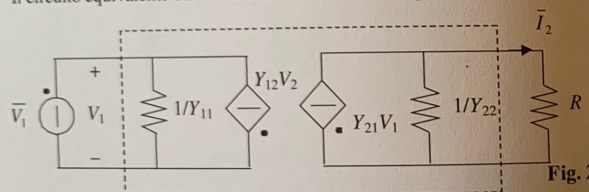


Fig. 2

Considerato il partitore di corrente nel circuito di uscita si ha che

$$\bar{I}_2 = \frac{(1/R)}{(1/R) + Y_{22}} (-Y_{21} \bar{V}_1)$$

da cui

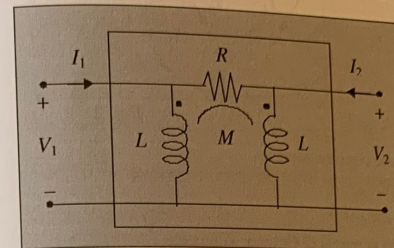
$$Y_{22} = -\frac{1}{R} \left(1 + \frac{Y_{21} \bar{V}_1}{\bar{I}_2} \right) = 9 \text{ A/V}.$$

La matrice Y associata alla rete due porte risulta pertanto

$$[Y] = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 9 \end{bmatrix}.$$

6.1.2 - Determinazione matrice $h(s)$

Determinare la matrice a parametri $h(s)$ per la rete due porte mostrata in figura.



La matrice a parametri $h(s)$ permette di esprimere le variabili V_1 , I_2 in funzione delle variabili I_1 , V_2 :

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = [h(s)] \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} V_1 = h_{11}(s) I_1 + h_{12}(s) V_2 \\ I_2 = h_{21}(s) I_1 + h_{22}(s) V_2 \end{cases}$$

Il calcolo dei parametri $h_{ij}(s)$ è eseguito a coppie così come di seguito mostrato.

Calcolo di h_{11} , h_{21}

Posto $V_2 = 0$ si ha che

$$h_{11}(s) = \frac{V_1}{I_1} \Big|_{V_2=0}, \quad h_{21}(s) = \frac{I_2}{I_1} \Big|_{V_2=0}.$$

Il circuito $\mathcal{L}$ - trasformato da considerare è mostrato in Fig. 1 ed è risolto con il metodo delle correnti di maglia. In particolare, considerato il grafo di Fig. 2 si assumono I_1 , I_A , I_B come correnti di maglia monocorda; la corrente I_1 è imposta dal generatore mentre per le correnti I_A , I_B valgono le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} (R + Ls) I_A + Ms I_B - R I_1 = 0 & \text{equazione maglia corrente } I_A \\ Ls I_B + Ms I_A = 0 & \text{equazione maglia corrente } I_B \end{cases}$$

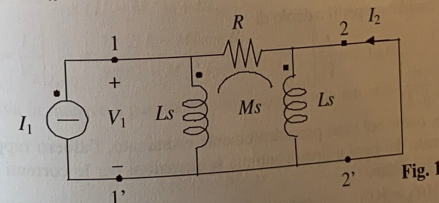


Fig. 1

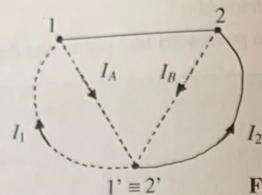


Fig. 2

Il sistema può essere riscritto come

$$\begin{cases} (R + Ls)I_A + MsI_B = RI_1 \\ MsI_A + LsI_B = 0 \end{cases}$$

e risolto utilizzando la regola di Cramer; si ha che

$$I_A = \frac{RL}{(L^2 - M^2)s + RL} I_1, \quad I_B = -\frac{RM}{(L^2 - M^2)s + RL} I_1.$$

Ne segue che (cfr. Fig. 1, 2)

$$V_1 = R(I_1 - I_A) = R \frac{(L^2 - M^2)s}{(L^2 - M^2)s + RL} I_1$$

da cui

$$h_{11}(s) = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{V_2=0} = R \frac{(L^2 - M^2)s}{(L^2 - M^2)s + RL},$$

mentre, per il I principio di Kirchhoff applicato al macro nodo 1, 2 (cfr. Fig. 2),

$$I_2 = I_A + I_B - I_1 = -\frac{(L^2 - M^2)s + RM}{(L^2 - M^2)s + RL} I_1 \text{ da cui}$$

$$h_{21}(s) = \left. \frac{I_2}{I_1} \right|_{V_2=0} = -\frac{(L^2 - M^2)s + RM}{(L^2 - M^2)s + RL}.$$

Calcolo di h_{12} , h_{22}

Il circuito da considerare per il calcolo di

$$h_{12}(s) = \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_1=0}, \quad h_{22}(s) = \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{I_1=0},$$

è mostrato in Fig. 3.

Considerato, come nel caso precedentemente esaminato, l'albero rappresentato in Fig. 4 e formato dai rami a linea continua le equazioni per le correnti di maglia monocorda I_A , I_B risultano

$$\begin{cases} (R + Ls)I_A + MsI_B = V_2 \\ MsI_A + LsI_B = V_2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{equazione maglia corrente } I_A \\ \text{equazione maglia corrente } I_B \end{array}$$

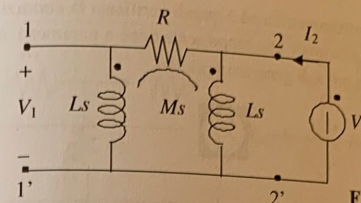


Fig. 3

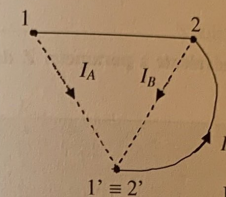


Fig. 4

Il sistema è risolto da

$$I_A = \frac{(L - M)}{(L^2 - M^2)s + RL} V_2,$$

$$I_B = \frac{1}{s} \frac{(L - M)s + R}{(L^2 - M^2)s + RL} V_2.$$

Ne segue che

$$V_1 = LsI_A + MsI_B = \frac{(L^2 - M^2)s + RM}{(L^2 - M^2)s + RL} V_2 \text{ da cui}$$

$$h_{12}(s) = \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_1=0} = \frac{(L^2 - M^2)s + RM}{(L^2 - M^2)s + RL}$$

ed infine

$$I_2 = I_A + I_B = \frac{1}{s} \frac{2(L - M)s + R}{(L^2 - M^2)s + RL} V_2 \text{ da cui}$$

$$h_{22}(s) = \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{I_1=0} = \frac{1}{s} \frac{2(L - M)s + R}{(L^2 - M^2)s + RL}.$$

In definitiva la matrice a parametri $h(s)$ associata alla rete due porte assegnata è data da

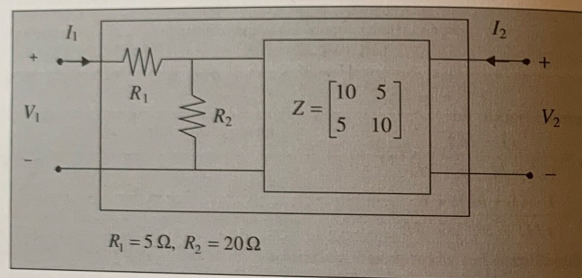
$$[h(s)] = \frac{1}{(L^2 - M^2)s + RL} \begin{bmatrix} R(L^2 - M^2)s & (L^2 - M^2)s + RM \\ -(L^2 - M^2)s - RM & [2(L - M)s + R]/s \end{bmatrix}.$$

La matrice risulta antisimmetrica ed è quindi verificata la condizione di reciprocità $h_{12} = -h_{21}$ in base alla quale una rappresentazione a parametri h ammette rappresentazione circuitale priva di generatori pilotati.



6.1.3 - Circuito resistivo, matrice Z

Determinare la matrice equivalente a parametri Z della rete due porte di figura.



Il circuito associato alla matrice

$$[Z] = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix}$$

da determinare è mostrato in Fig. 1; si determinano i parametri di tale circuito eseguendo le apposite prove nel circuito di Fig. 2, equivalente a quello assegnato, dove

$$R_{A11} = R_{A22} = 10 \Omega,$$

$$R_{A21} = R_{A12} = 5 \Omega.$$

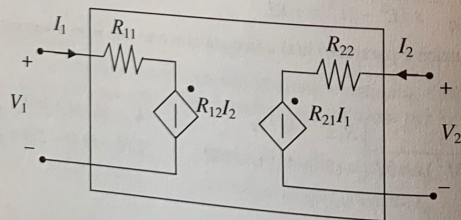


Fig. 1

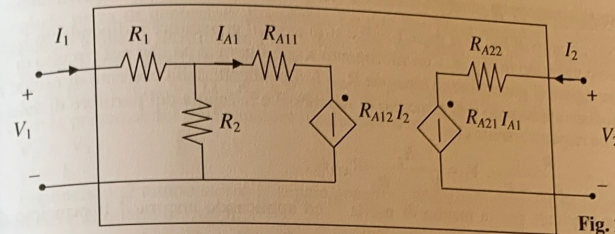


Fig. 2

Valutazione di R_{11} , R_{21}

Nel circuito di Fig. 2 si pone $I_2 = 0$ e si fa agire il generatore indipendente I_1 così come mostrato in Fig. 3. Applicando in tale circuito la regola del partitore di corrente in corrispondenza del nodo A ed il II principio di Kirchhoff alla maglia di ingresso si ha rispettivamente che

$$I_{A1} = \frac{R_2}{R_{A11} + R_2} I_1, \quad V_1 = \left(R_1 + \frac{R_2 R_{A11}}{R_2 + R_{A11}} \right) I_1;$$

ne segue che

$$R_{11} = \frac{V_1}{I_1} \Big|_{I_2=0} = R_1 + \frac{R_2 R_{A11}}{R_2 + R_{A11}} = \frac{35}{3} \Omega$$

e poiché

$$V_2 = R_{A21} I_{A1} = R_{A21} \frac{R_2}{R_{A11} + R_2} I_1$$

si ha che

$$R_{21} = \frac{V_2}{I_1} \Big|_{I_2=0} = R_{A21} \frac{R_2}{R_{A11} + R_2} = \frac{10}{3} \Omega.$$

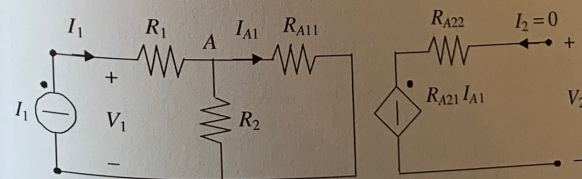


Fig. 3

Valutazione di R_{22} , R_{12}

Nel circuito di Fig. 2 si pone $I_1 = 0$ e si fa agire il generatore indipendente I_2 così come mostrato in Fig. 4. Con riferimento a tale figura si ha che nel circuito di ingresso agisce il generatore di tensione $R_{A12} I_2$ dipendente dalla corrente di uscita; in particolare applicando il II principio di Kirchhoff e la regola del partitore di tensione si ha rispettivamente che

$$I_{A1} = -\frac{R_{A12} I_2}{R_{A11} + R_2}, \quad V_1 = \frac{R_2}{R_{A11} + R_2} R_{A12} I_2;$$

considerando poi la maglia di uscita ⁽¹⁾ ed applicando ancora il II principio di Kirchhoff si ha che

$$V_2 = R_{A22} I_2 + R_{A21} I_{A1} = R_{A22} I_2 - R_{A21} \frac{R_{A12} I_2}{R_{A11} + R_2}.$$

Si ha pertanto che

$$R_{22} = \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{I_1=0} = R_{A22} - R_{A21} \frac{R_{A12}}{R_{A11} + R_2} = \frac{55}{6} \Omega,$$

$$R_{12} = \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{I_1=0} = \frac{R_2}{R_{A11} + R_2} R_{A12} = \frac{10}{3} \Omega$$

La matrice Z risulta quindi

$$[Z] = \begin{bmatrix} 35/3 & 10/3 \\ 10/3 & 55/6 \end{bmatrix};$$

da osservare che la matrice è simmetrica così come deve essere essendo la rete due porte assegnata resistiva.

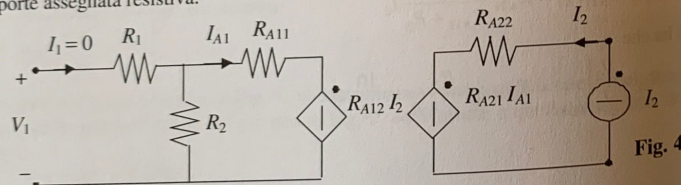


Fig. 4

Approfondimento

La matrice a parametri Z assegnata (cfr. testo esercizio)

$$[Z] = \begin{bmatrix} R_{A11} & R_{A12} \\ R_{A21} & R_{A22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}$$

⁽¹⁾ Da notare che pur essendo $I_1 = 0$ si ha che $I_{A1} \neq 0$ e quindi nel circuito di uscita compare il generatore di tensione dipendente $R_{A21} I_{A1}$.

è simmetrica e, come tale, la rete due porte associata ammette una rappresentazione circuitale priva di generatori dipendenti. La rete due porte assegnata è dunque equivalente a quella mostrata in Fig. 5 dove (cfr. M. Raugi, *Lezioni di Elettrotecnica*, Edizioni Plus, Par. 7.2, pag. 230)

$$R_A = R_{A11} - R_{A12} = 5 \Omega, \quad R_B = R_{A12} = 5 \Omega, \quad R_C = R_{A22} - R_{A12} = R_A = 5 \Omega$$

e dove la presenza del trasformatore ideale garantisce

$$V_2' = V_2,$$

$$I_2 = I_2'$$

imponendo al tempo stesso la separazione tra i potenziali elettrici dello stadio di ingresso e di quello di uscita.

La valutazione di R_{11} , R_{21} , R_{22} , R_{12} può equivalentemente essere eseguita, nel modo già visto, considerando il circuito di Fig. 5 invece che quello di Fig. 2.

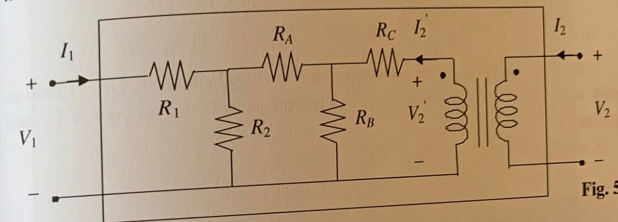
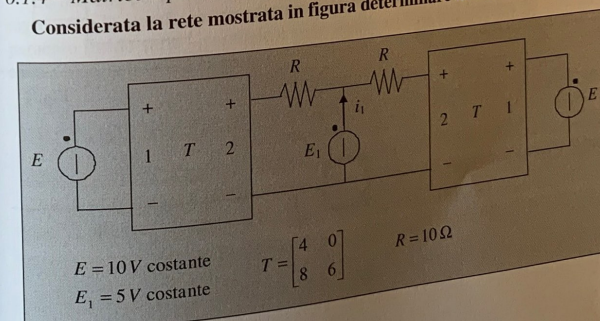


Fig. 5

6.1.4 - Matrice a parametri T

Considerata la rete mostrata in figura determinare la corrente i_1 .



$$E = 10 \text{ V costante}$$

$$E_1 = 5 \text{ V costante}$$

$$T = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$$

$$R = 10 \Omega$$

Applicando la modifica topologica al generatore E_1 si studiano due circuiti separati come mostrato in Fig. 1; in particolare, si che

$$i_1 = i_1' + i_1'' = -i_{A2} - i_{B2}.$$

Tenendo conto dei riferimenti scelti per le tensioni e le correnti e della definizione di matrice a parametri T, si ha che

$$\begin{bmatrix} E \\ i_{A1} \end{bmatrix} = [T] \begin{bmatrix} v_{A2} \\ i_{A2} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} E = 4v_{A2} \\ i_{A1} = 8v_{A2} + 6i_{A2} \end{cases};$$

ne segue che il generatore E impone la tensione

$$v_{A2} = \frac{1}{4}E.$$

La corrente di uscita dal bipolo A vale pertanto

$$i_{A1} = \frac{v_{A2} - E_1}{R} = \frac{E - 4E_1}{4R} = -0,25 \text{ A}$$

Visto che le due parti in cui è suddivisa la rete considerata (cfr. Fig. 1) sono uguali si ha che $i_{B2} = i_{A2} = -0,25 \text{ A}$; la corrente erogata dal generatore E_1 vale pertanto

$$i_1 = -2i_{A1} = 0,5 \text{ A}.$$

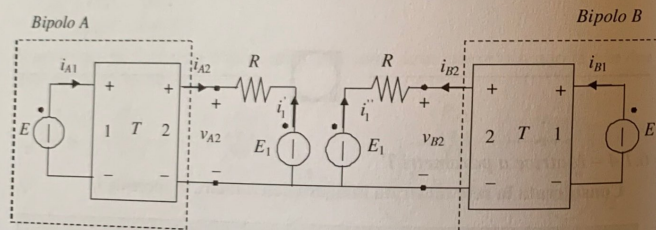
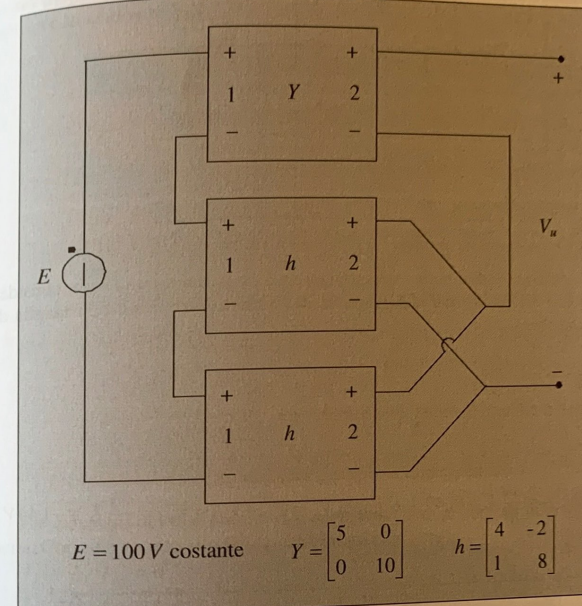


Fig. 1

6.1.5 - Matrici Y, h (con collegamento parallelo ibrido serie-parallelo) Determinare la tensione V_u .



Le reti due porte descritte dalle matrici a parametri h hanno la stessa corrente di ingresso e la stessa tensione di uscita; le due reti sono dunque collegate con collegamento ibrido serie - parallelo e sono equivalenti ad una rete due porte la cui matrice a parametri h è data da

$$[h_{SP}] = [h] + [h] = 2[h] = \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 2 & 16 \end{bmatrix}.$$

La rete assegnata è pertanto equivalente per ciò che riguarda il calcolo della tensione V_u alla rete mostrata in Fig. 1.

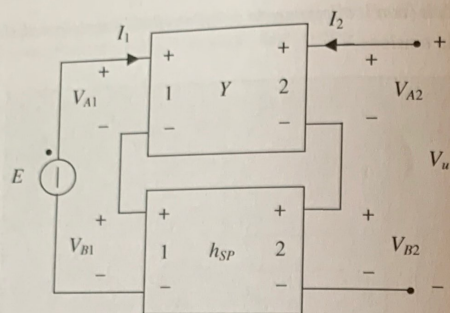


Fig. 1

Sostituendo alle reti due porte i rispettivi circuiti equivalenti può essere considerata la rete di Fig. 2 dove, per il II principio di Kirchhoff applicato alla maglia di ingresso si ha che

$$E + 4V_{B2} = \left(\frac{1}{5} + 8\right)I_1$$

e, considerato il circuito di uscita dove $I_2 = 0$,

$$V_{B2} = -\frac{1}{16} \cdot 2I_1.$$

Ne segue che $I_1 = \frac{10}{87}E \approx 11,49 \text{ A}$ e quindi $V_u = V_{A2} + V_{B2} = V_{B2} = -\frac{1}{8}I_1 \approx -1,44 \text{ V}$.

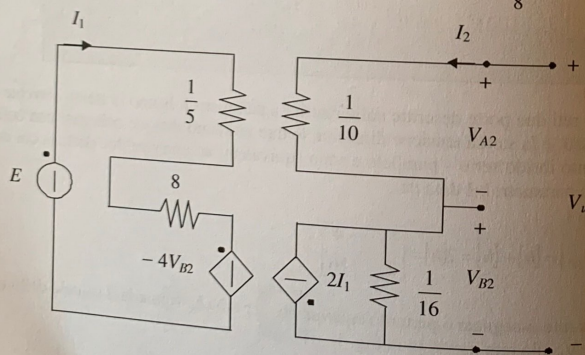
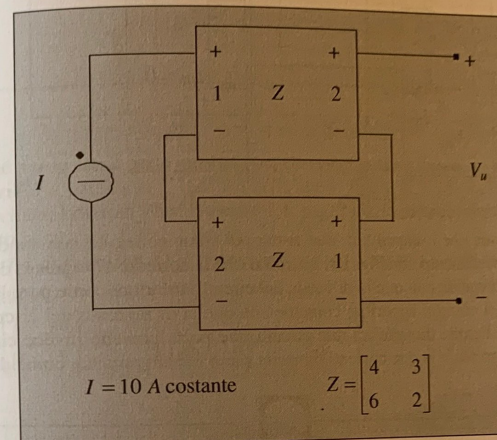


Fig. 2

6.1.6 - Matrice Z, condizione di serie tra due circuiti due porte

Due circuiti due porte con identica matrice a parametri Z e le cui porte 1, 2 sono disposte come in figura sono collegati ad un generatore costante. Determinare la tensione V_u .



$I = 10 \text{ A costante}$

$$Z = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$$

Per ciascuno dei due circuiti due porte sono note le correnti di ingresso e di uscita. Con riferimento alla Fig. 1 si ha infatti che

$$I_{A1} = I, \quad I_{A2} = 0,$$

$$I_{B1} = 0, \quad I_{B2} = I;$$

ne segue che sono note le tensioni di ingresso e di uscita, essendo nota la matrice a parametri Z che descrive ciascuno dei due circuiti.

Si ha che

$$\begin{bmatrix} V_{A1} \\ V_{A2} \end{bmatrix} = [Z] \begin{bmatrix} I_{A1} \\ I_{A2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4I \\ 6I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 \\ 60 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} V_{B1} \\ V_{B2} \end{bmatrix} = [Z] \begin{bmatrix} I_{B1} \\ I_{B2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3I \\ 2I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 20 \end{bmatrix},$$

con le tensioni espresse in volt.

La tensione di uscita vale pertanto

$$V_u = V_{A2} + V_{B1} = 90 \text{ V}.$$

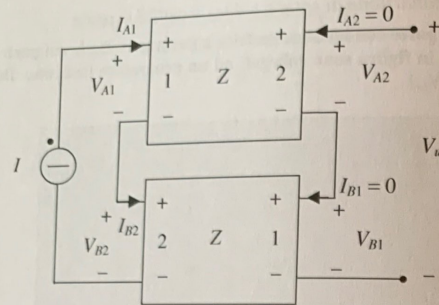


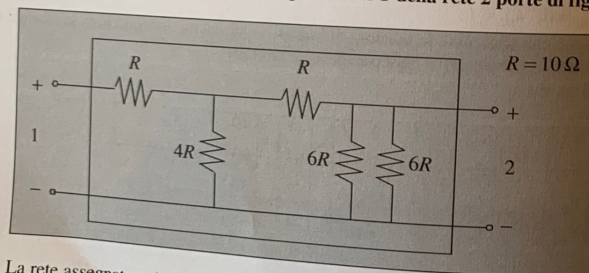
Fig. 1

Da osservare che i due circuiti due porte, per come collegati, non sono in serie. Ancora con riferimento alla Fig. 1 si ha infatti che la corrente di ingresso del circuito superiore coincide con quella di uscita del circuito inferiore come pure la corrente di uscita del circuito superiore coincide con quella di ingresso del circuito inferiore. La condizione di serie tra due circuiti due porte prevede invece che le due correnti di ingresso e le due correnti di uscita siano rispettivamente coincidenti.



6.1.7 - Rappresentazione a parametri T di reti 2 porte elementari

Determinare la rappresentazione a parametri T della rete 2 porte di figura.



La rete assegnata può essere ridisegnata come mostrato in Fig. 1 dove si è tenuto conto del collegamento parallelo tra i resistori di valore $6R$ e dove si evidenziano i collegamenti in cascata di quattro reti due porte.

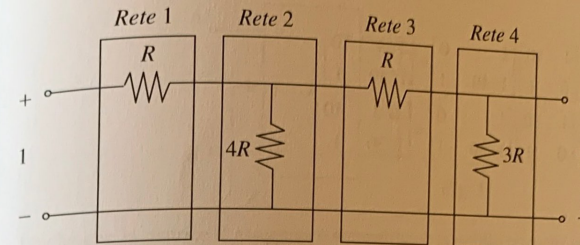


Fig. 1

Poiché per le reti 2 porte mostrate rispettivamente nelle Fig. 2, 3 valgono le rappresentazioni a parametri T indicate nelle stesse figure (cfr. M. Raugi, *Lezioni di Elettrotecnica*, Edizioni Plus, Esempio 7.4, pag. 245), la matrice equivalente al collegamento in cascata di Fig. 1 risulta

$$T_{eq} = T_1 T_2 T_3 T_4 = (T_1 T_2)(T_3 T_4).$$

essendo

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/40 & 1 \end{bmatrix}, T_3 = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, T_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/30 & 1 \end{bmatrix}.$$

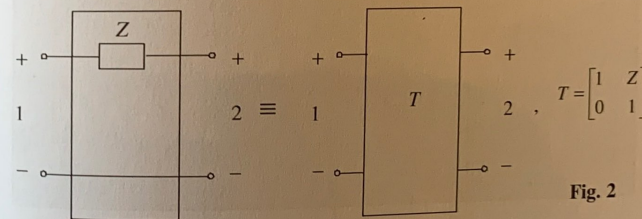


Fig. 2

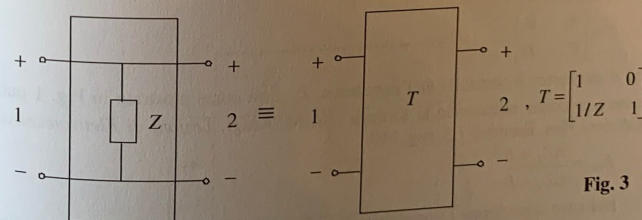


Fig. 3

Si ha che

$$T_1 T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/40 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/4 & 10 \\ 1/40 & 1 \end{bmatrix}$$

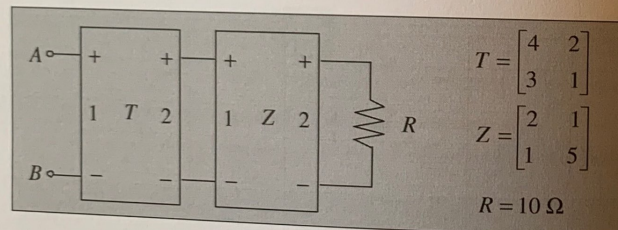
$$T_3 T_4 = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/30 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/3 & 10 \\ 1/30 & 1 \end{bmatrix}$$

da cui

$$T_{eq} = \begin{bmatrix} 5/4 & 10 \\ 1/40 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4/3 & 10 \\ 1/30 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 45/2 \\ 1/15 & 5/4 \end{bmatrix}$$



6.1.8 - Impedenza vista dai morsetti di ingresso di una rete due porte
Determinare l'impedenza vista dai morsetti AB del seguente circuito.



Il calcolo dell'impedenza di ingresso di una rete due porte descritta dalla matrice a parametri T

$$T = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

ed il cui carico è costituito dall'impedenza Z_C così come mostrato in Fig. 1 può essere calcolata utilizzando la formula (cfr. M. Raugi, *Lezioni di Elettrotecnica*, Edizioni Plus, Esempio 7.5, pag. 249)

$$Z_{IN} = \frac{AZ_L + B}{CZ_L + D}$$

Nel caso considerato l'impedenza Z_L è l'impedenza di ingresso della rete due porte descritta dalla matrice a parametri Z ed il cui carico è costituito dalla resistenza R (cfr. Fig. 2).

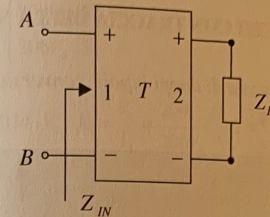


Fig. 1

Poiché che la matrice Z assegnata è simmetrica è possibile ottenere un circuito equivalente utilizzando soltanto impedenze. In particolare il calcolo di Z_L può essere effettuato considerando il circuito di Fig. 3 dove (cfr. M. Raugi, *Lezioni di Elettrotecnica*, Edizioni Plus, Par. 7.2, pag. 230)

$$Z_A = Z_{11} - Z_{12} = 1 \Omega,$$

$$Z_B = Z_{12} = Z_{21} = 1 \Omega,$$

$$Z_C = Z_{22} - Z_{12} = 4 \Omega$$

ottenendo

$$Z_L = Z_A + Z_B // (Z_C + R) = 1,933 \Omega.$$

L'impedenza di ingresso vista dai morsetti A, B del circuito assegnato vale pertanto

$$Z_{IN} = \frac{AZ_L + B}{CZ_L + D} = 1,43 \Omega.$$

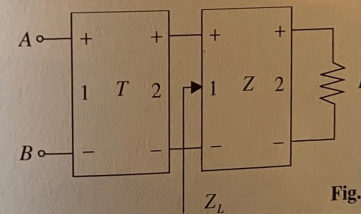


Fig. 2

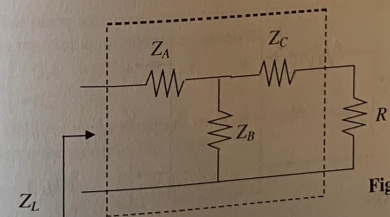
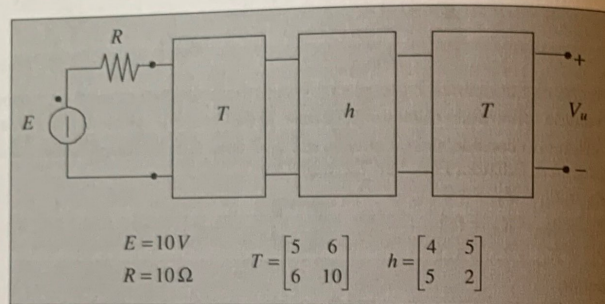


Fig. 3

6.2 SEZIONE B – ESERCIZI CON TRACCIA DELLA SOLUZIONE

6.2.1 – Collegamento in cascata di doppi bipoli; conversione $h \rightarrow T$

Determinare la tensione V_u .



Nel circuito assegnato si ha il collegamento in cascata di tre reti due porte. Convertendo la rappresentazione a parametri h del doppio bipolo centrale nella rappresentazione equivalente T_h a parametri T , si hanno tre reti due porte in cascata rappresentate ciascuna da una matrice a parametri T . Tali reti sono perciò equivalenti ad una rete due porte caratterizzata da una matrice di trasmissione $T_{eq} = T T_h T$.

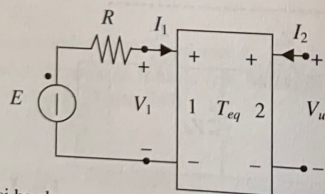
Si ha che

$$T_h = \begin{bmatrix} -\Delta h/h_{21} & -h_{11}/h_{21} \\ -h_{22}/h_{21} & -1/h_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17/5 & -4/5 \\ -2/5 & -1/5 \end{bmatrix}$$

da cui segue che

$$T_{eq} = T T_h T = T (T_h T) = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 61/5 & 62/5 \\ -16/5 & -22/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 209/5 & 178/5 \\ 206/5 & 152/5 \end{bmatrix}$$

Rispetto al calcolo della tensione V_u il circuito assegnato è pertanto equivalente a quello mostrato in Fig. 1.



Poiché $I_2 = 0$ si ha che

Fig. 1

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = T_{eq} \begin{bmatrix} V_u \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 209V_u/5 \\ 206V_u/5 \end{bmatrix}$$

da cui segue che

$$V_u = \frac{5}{209} V_1 = 0,024 \cdot V_1, \quad R_1 = \frac{V_1}{I_1} = \frac{209V_u/5}{206V_u/5} = \frac{209}{206} = 1,015\Omega,$$

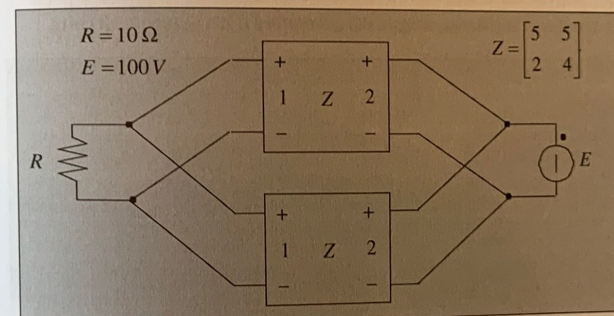
avendo indicato con R_1 la resistenza vista dai morsetti di ingresso della rete T_{eq} . Applicando la regola del partitore di tensione nella maglia costituita da E , R , R_1 si ha che

$$V_1 = \frac{R_1}{R_1 + R} E = 0,921V \text{ e quindi } V_u = 22mV.$$



6.2.2 – Collegamento in parallelo di doppi bipoli; conversione $Z \rightarrow Y$

Determinare la potenza dissipata nella resistenza R .



I circuiti due porte assegnati sono collegati in parallelo. Rappresentando ciascun circuito con la matrice equivalente a parametri Y

$$Y = Z^{-1} = \begin{bmatrix} 0,4 & -0,5 \\ -0,2 & 0,5 \end{bmatrix}$$

il calcolo della potenza dissipata su R può essere eseguito considerando il circuito equivalente mostrato in Fig. 1 dove

$$Y_p = Y + Y = \begin{bmatrix} 0,8 & -1 \\ -0,4 & 1 \end{bmatrix}, \quad V_1 = -RI_1, \quad V_2 = E.$$

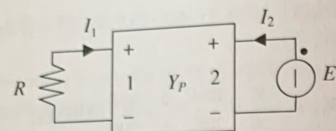


Fig. 1

Dalla definizione di matrice a parametri Y si ottiene il sistema risolutivo espresso in forma matriciale da

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = Y_p \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8 & -1 \\ -0,4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -10I_1 \\ 100 \end{bmatrix}$$

e risolto da

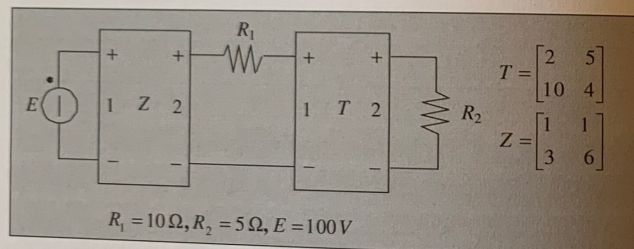
$$I_1 = -11,111 \text{ A}, I_2 = 55,56 \text{ A}.$$

Ne segue che la potenza dissipata sul resistore R risulta $P = R I_1^2 \cong 1235 \text{ W}$.



6.2.3 - Impedenza di ingresso ed impedenza di carico di reti due porte

Determinare la potenza erogata dal generatore E nel seguente circuito.



La potenza erogata dal generatore E è data da $P = EI$ essendo I la corrente fornita dal generatore stesso.

Per il calcolo di I si può far riferimento al circuito equivalente mostrato in Fig. 1 dove

$$Z_L = R_1 + Z_{IN} = 10,278 \Omega.$$

Tale impedenza è calcolata tenendo conto (cfr. Esercizio 6.1.8 di questo stesso capitolo) del collegamento serie tra R_1 e

$$Z_{IN} = \frac{AR_2 + B}{CR_2 + D} = 0,278 \Omega,$$

impedenza di ingresso della rete due porte descritta dalla matrice a parametri T nel circuito assegnato.

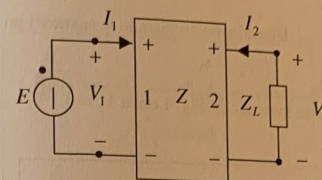


Fig. 1

Tenendo conto della definizione di matrice a parametri Z

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = Z \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

e del fatto che, nel circuito di Fig. 1, si ha che

$$V_1 = E = 100 \text{ V}, V_2 = -Z_L I_2$$

si ottiene il sistema di equazioni nelle incognite I_1, I_2

$$\begin{cases} I_1 + I_2 = 100 \\ 3I_1 + 6I_2 = -10,278 I_2 \end{cases}$$

risolto da

$$I_1 = 122,6 \text{ A}, I_2 = -22,6 \text{ A}.$$

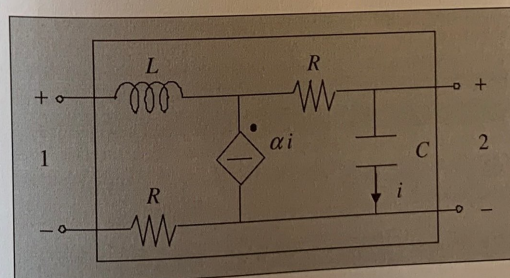
Ne segue che la potenza erogata dal generatore vale

$$P = EI = EI_1 = 12,26 \text{ kW}.$$



6.2.4 - Matrice a parametri h

Determinare in forma simbolica i parametri $h(s)$ del seguente circuito 2 porte.



Nella rappresentazione a parametri h si ha che

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

I parametri della matrice si determinano eseguendo le seguenti prove.

Valutazione di h_{11} , h_{21}

Si fa riferimento al circuito mostrato in Fig. 1 dove $V_2 = 0$.

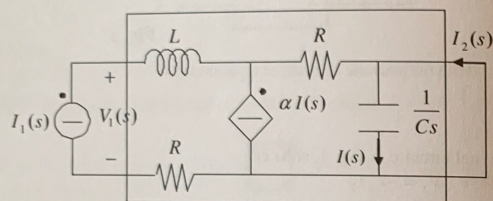


Fig. 1

Si ha che $I(s) = 0$ da cui $\alpha I(s) = 0$ e quindi

$$I_2(s) = -I_1(s), \quad V_1(s) = LsI_1(s) + 2RI_1(s).$$

Ne segue che

$$h_{11} = \left. \frac{V_1(s)}{I_1(s)} \right|_{V_2(s)=0} = 2R + Ls,$$

$$h_{21} = \left. \frac{I_2(s)}{I_1(s)} \right|_{V_2(s)=0} = -1.$$

Valutazione di h_{12} , h_{22}

Il circuito da considerare è mostrato in Fig. 2 dove $I_1(s) = 0$.

Si ha che

$$V_1(s) = -RI_R(s) + V_2(s)$$

$$I_2(s) = I(s) + I_R(s)$$

Poiché

$$I(s) = CsV_2(s),$$

$$I_R(s) = -\alpha I(s) = -\alpha CsV_2(s)$$

risulta

$$h_{12} = \left. \frac{V_1(s)}{V_2(s)} \right|_{I_1(s)=0} = 1 + \alpha RCs,$$

$$h_{22} = \left. \frac{I_2(s)}{V_2(s)} \right|_{I_1(s)=0} = (1 - \alpha)Cs.$$

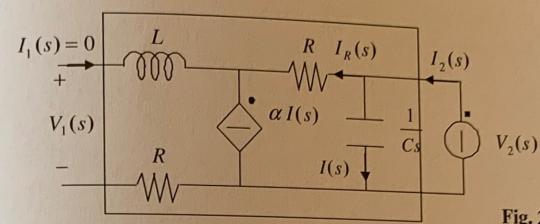
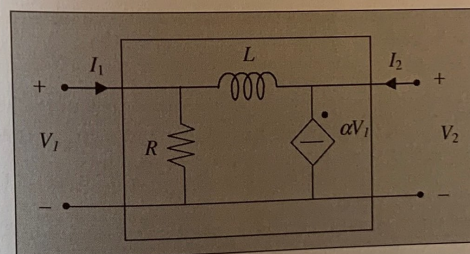


Fig. 2

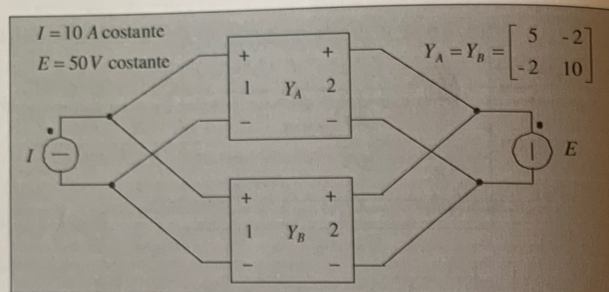
6.3 SEZIONE C – ESERCIZI DA SVOLGERE

6.3.1 – Matrice a parametri h

Determinare in forma simbolica la matrice a parametri $h(s)$ per la rete due porte di figura.



6.3.2 – Collegamento tra circuiti due porte

Determinare la potenza erogata dal generatore E .

Appendice

SOLUZIONE ESERCIZI SEZIONE C

Cap. 1 – Circuiti resistivi

Es. 1.3.1 - $i_1 = -1,6 \text{ A}, i_2 = -2 \text{ A}$.

Es. 1.3.2 - $V_{Th} \cong 46,67 \text{ V}, R_{Th} = 0$.

Es. 1.3.3 - $i_1 \cong 0,833 \text{ A}, P_E \cong 50,33 \text{ W}, P_I \cong 2033,33 \text{ W}$.

Es. 1.3.4 - $V_{AB} \cong 16,11 \text{ V}$.

Es. 1.3.5 - $V_{AB} \cong 9,615 \text{ V}$.

Cap. 2 – Circuiti a regime sinusoidale

Es. 2.3.1 - $P = 133,2 \text{ W}, Q = -22,3 \text{ VAR}$.

Es. 2.3.2 - $W = 0$.

Es. 2.3.3 - $P = 61,765 \text{ W}$.

Cap. 3 – Circuiti a regime periodico non sinusoidale

Es. 3.3.1 - $W_0 = 125 \text{ mJ}, W_1 \cong 2,5 \text{ mJ}, W = W_0 + W_1 \cong 127,5 \text{ mJ}$.

Cap. 4 – Circuiti aperiodici

Es. 4.3.1 - $v_{AB}(t) = [2,381 - 2,381 \cdot \exp(-5676t)]u(t) \text{ V}$.

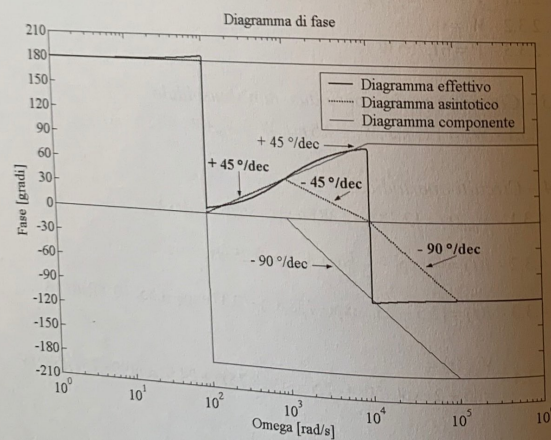
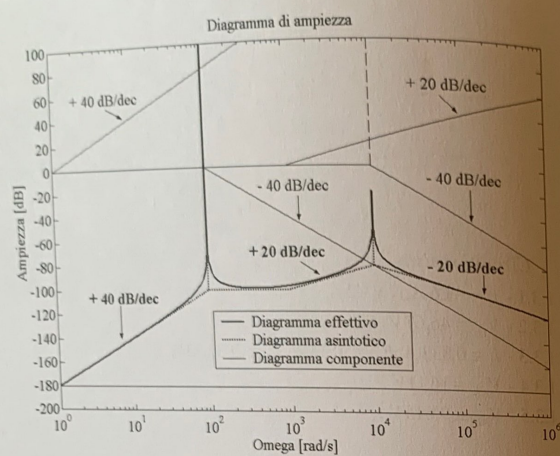
Es. 4.3.2 - $i(t) = \frac{2}{3} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)u(t) \text{ A}, \tau = 0,25 \text{ ms}$.

Es. 4.3.3 - $i(t) = [2,5 - 2,13 \exp(-738,8t) - 0,37 \exp(-1,55 \cdot 10^3 t)]u(t) \text{ A}$.

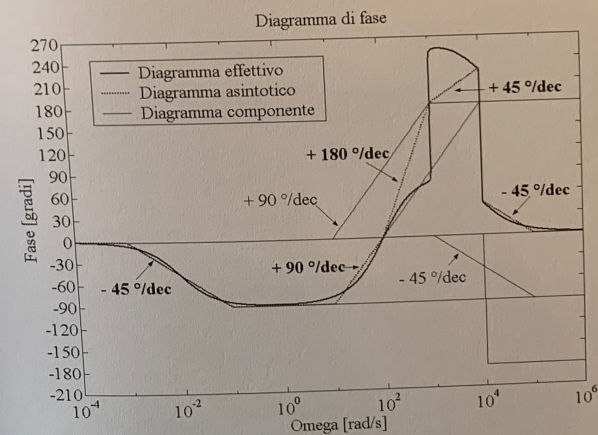
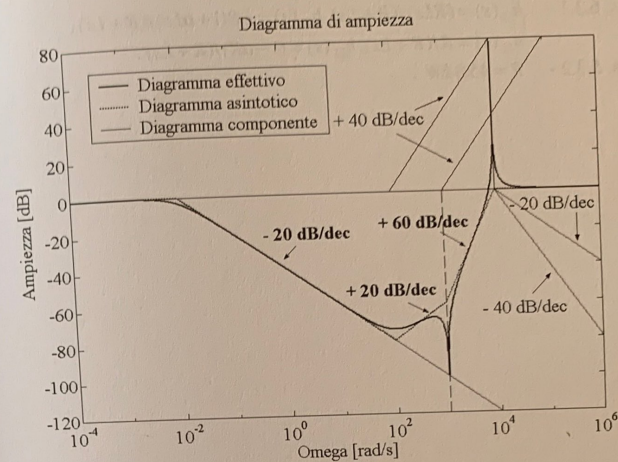
Es. 4.3.4 - $V_{AB}(t) = \{5 + 2 \exp(-50t)[-2,5 \cos(998,75t) + 24,91 \sin(998,75t)]\}u(t) \text{ V}$

Cap. 5 - Rappresentazione ingresso uscita di un circuito

Es. 5.3.1 - Diagramma di ampiezza e fase.



Es. 5.3.2 - Diagramma di ampiezza e fase.



Cap. 6 – Circuiti a due porte

Es. 6.3.1 - $h_{11}(s) = (RLs)/(R + Ls)$, $h_{21}(s) = -R(1 + \alpha Ls)/(R + Ls)$,
 $h_{12}(s) = R/(R + Ls)$, $h_{22}(s) = (1 - \alpha R)/(R + Ls)$.

Es. 5.3.2 - $P = 45,8 \text{ kW}$.