

Ultima revisione: 6 marzo 2007

Indice

1	L'AMPLIFICATORE OPERAZIONALE	2
1.1	Premesse	2
1.2	Amplificatore Operazionale Ideale	3
1.2.1	Modello lineare e caratteristiche	3
1.2.2	AO ideale in retroazionamento negativamente	5
1.3	Amplificatore Operazionale Reale	9
1.3.1	Effetti del guadagno differenziale ad anello aperto di valore finito	13
1.3.2	Effetti della resistenza di ingresso di valore finito e della resistenza di uscita non nulla	14
1.3.3	Ulteriori non idealità degli AO dovute allo stadio di ingresso	20
1.3.4	Effetti della banda finita	28
1.3.5	Slew rate	35
1.3.6	Approfondimenti	36
2	AO CON RETROAZIONE NEGATIVA: APPLICAZIONI	39
2.1	Introduzione	39
2.2	Sommatore	39
2.3	Sottrattore	40
2.4	Derivatore ed Integratore	42
2.4.1	Derivatore con AO ideale	42
2.4.2	Integratore con AO ideale	43
2.4.3	Integratore: effetto del guadagno e della banda finiti dell'AO	45
2.4.4	Integratore: effetto della resistenza di uscita non nulla dell'AO	48
2.4.5	Integratore: effetto di tensione di offset e correnti di polarizzazione dell'AO	50
2.5	AO con rete di retroazione non lineare	55
2.5.1	Raddrizzatori con e senza saturazione	56
2.5.2	Amplificatore logaritmico e antilogaritmico	62
2.5.3	Ulteriori esempi di AO con rete di retroazione non lineare	63

Capitolo 1

L'AMPLIFICATORE OPERAZIONALE

1.1 Premesse

In queste dispense si dà per scontato che il lettore abbia familiarità con gli argomenti svolti negli esami di Analisi e Geometria, ed in particolare con i numeri complessi nelle varie forme di rappresentazione e con il calcolo integro-differenziale.

Si assumono inoltre come noti gli argomenti svolti nei corsi di Elettrotecnica, ed in particolare: le leggi di Kirckoff, (partitore di tensione e di corrente; effetti di carico: generatori di tensione e corrente reali), il principio di sovrapposizione degli effetti applicato allo studio dei circuiti lineari, i teoremi di Thevenin e di Norton (ed in particolare calcolo dell'impedenza equivalente di Thevenin), le relazioni che esprimono la carica di un condensatore a tensione costante e a corrente costante.

Per quanto riguarda gli argomenti svolti nel corso di Elettronica I, si assume che il lettore abbia familiarità con le relazioni che regolano il funzionamento dei diodi e dei transistori sia bipolari che ad effetto di campo, e con i concetti di base della teoria della retroazione negativa (in particolare: diagramma unifilare di Black, principio delle masse virtuali, effetto su resistenza di ingresso ed uscita, guadagno per ingressi sommati in uscita, effetto su banda passante per sistemi a singolo polo, diagrammi di Bode per modulo e fase, instabilità nei sistemi retroazionati positivamente).

1.2 Amplificatore Operazionale Ideale

In questo capitolo vengono illustrate e discusse le caratteristiche dell'amplificatore operazionale (AO) reale. La trattazione inizia dall'AO ideale nelle due configurazioni di base, e prosegue analizzando come si modificano le relazioni trovate per l'AO ideale quando si rilassano le ipotesi di idealità. La rimozione delle ipotesi di idealità viene giustificata sulla base della struttura interna dell'AO, che viene brevemente richiamata nel corso della trattazione. Nel corso della trattazione vengono quindi discussi i principali parametri e le principali configurazioni circuitali in cui l'AO reale viene impiegato, sia retroazionato negativamente che positivamente.

1.2.1 Modello lineare e caratteristiche

L'amplificatore operazionale è, nella forma più semplice, un dispositivo a 5 terminali (fig. 1.1.a): due ingressi, + ed -, chiamati rispettivamente *ingresso non invertente* ed *ingresso invertente*, due terminali di alimentazioni, S_+ ed S_- (che spesso, ed anche in questa trattazione, non vengono riportati nel simbolo circuitale, che diventa quindi a tre terminali), un'uscita (in figura 1.1 indicata con la scritta *out*, che tuttavia viene in genere omessa). Le tensioni dei terminali di ingresso e di uscita rispetto al potenziale di massa sono di seguito indicate come V_+ , V_- e V_{out} , così come le correnti entranti nei suddetti terminali verranno indicate come I_+ , I_- e I_{out} .

Le tensioni di alimentazione verranno indicate come $+V_S$ e $-V_S$. La rete lineare a due porte che si utilizza normalmente per descrivere il funzionamento dell'AO è quella dell'amplificatore di tensione, riportata in (fig. 1.1.b) all'interno del simbolo dell'AO. La porta di ingresso è passiva, ed è costituita da una resistenza R_{id} , tra i due ingressi + e -, ai cui capi si stabilisce la tensione $V_{id} = V_+ - V_-$. La porta di uscita è caratterizzata da un generatore di tensione controllato in tensione con in serie una resistenza R_o . Il generatore fornisce una tensione proporzionale alla tensione di controllo V_{id} secondo il fattore A (A è quindi il guadagno differenziale del circuito: si sta assumendo implicitamente, con questo modello, che l'AO abbia guadagno di modo comune nullo, ovvero che l'uscita non vari se agli ingressi + e - venga applicata una tensione $V_+ = V_- \neq 0$ V). In assenza di carico in uscita $V_{out} = AV_{id}$.

Con riferimento alla fig. 1.1.b, un AO ideale è caratterizzato da: $R_{id} = \infty$, $R_o = 0 \Omega$, $A = \infty$, $-V_S \leq V_{out} \leq +V_S$ (saturazione). Queste ipotesi implicano che:

- la caratteristica $V_{out} - V_{id}$ sia quella riportata in figura 1.2, e che quindi, se $-V_S < V_{out} < +V_S$, $V_{id} = 0$ V;

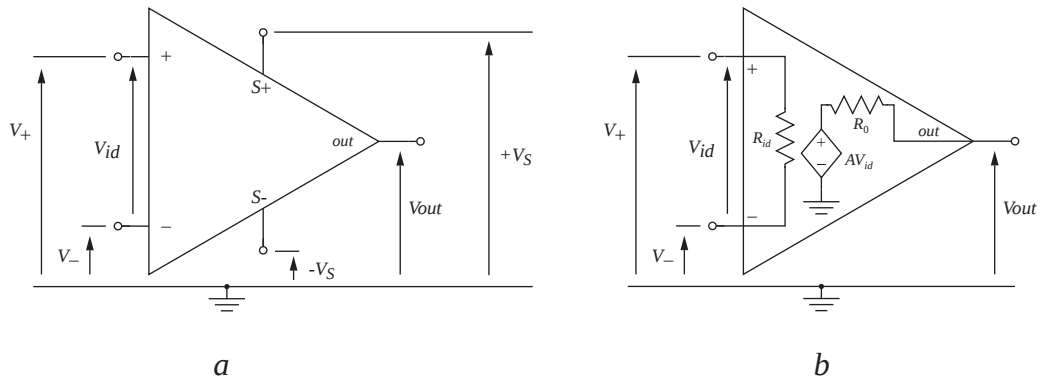


Figura 1.1: AO: Simbolo circuitale (a) e modello lineare (b)

- la corrente entrante nei due terminali di ingresso sia nulla ($I_+ = I_- = 0$ A);
- non ci siano effetti di carico né in ingresso né in uscita;
- il guadagno differenziale A non dipenda dalla frequenza, e quindi la banda dell'amplificatore sia infinita.

Per un AO ideale si assume inoltre, come già detto, di avere guadagno di modo comune nullo, di non avere limitazioni di pilotaggio in corrente, e di non avere alcun tipo di dipendenza delle caratteristiche dal tempo, dalla temperatura, dall'umidità, dalle variazioni della tensione di alimentazione.

Il guadagno differenziale di valore infinito dell'AO ideale rende questo dispositivo adatto ad essere utilizzato retroazionato negativamente, ovvero con uno o più elementi circuitali che mettono in collegamento l'uscita con l'ingresso invertente. *Da ora in poi, a meno che non sia diversamente specificato, la rete di retroazione suddetta si considera composta da resistenze.* Si suppone cioè che la rete di retroazione sia passiva e non dipendente dalla frequenza. Per un AO ideale retroazionato negativamente vale il *principio delle masse virtuali* secondo il quale la tensione $V_{id} = 0$ V, ovvero $V_+ = V_-$. Infatti, facendo riferimento al modello di Black per un amplificatore retroazionato riportato in figura, il segnale di retroazione x_f può essere espresso in funzione di A_{OL} , β (che si suppongono entrambi, finché non diversamente specificato, delle quantità reali positive), e di x_s come:

$$x_f = x_s \frac{\beta A_{OL}}{1 + \beta A_{OL}} \quad (1.1)$$

La quantità x_f , al tendere di A_{OL} ad ∞ , tende a x_s , e quindi il segnale di ingresso all'amplificatore $x_i = x_s - x_f$ (V_{id} nel caso dell'AO) tende anch'esso

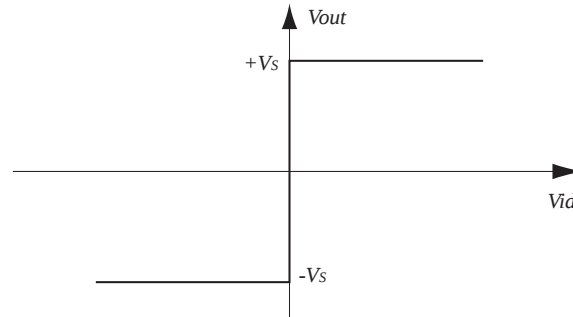
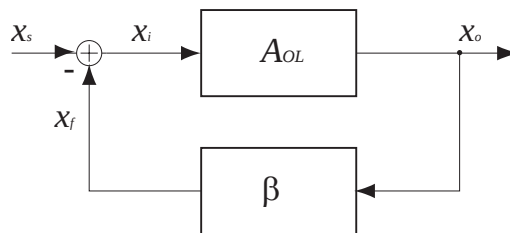
Figura 1.2: AO ideale: caratteristica $V_{out} - V_{id}$ con saturazione

Figura 1.3: Modello di Black di un amplificatore retroazionato

a zero. In presenza di retroazione positiva, ovvero con una rete di retroazione che collega l'uscita con l'ingresso invertente, il principio delle masse virtuali in generale non vale, come verrà discusso in dettaglio più avanti. E' comunque fin d'ora possibile osservare che il denominatore della (1.1), in caso di retroazione positiva diviene $(1 - \beta A_{OL})$, e che quindi, per $\beta A_{OL} \gg 1$, il segno di x_f sia opposto rispetto ad x_s . In queste condizioni, a meno che $x_s = x_f = 0$, il segnale x_i (V_{id} nel caso dell'AO) risulta necessariamente $\neq 0$. Questo significa anche, facendo riferimento alla fig. 1.2, che in queste condizioni l'uscita dell'AO assumerà il valore $+V_S$ o $-V_S$.

1.2.2 AO ideale in retroazionato negativamente

Configurazione non invertente

Applicando il principio delle masse virtuali al circuito di fig. 1.4 si ottiene:

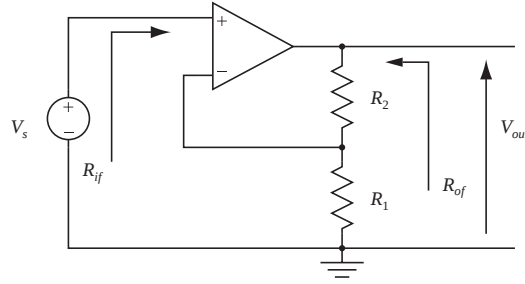


Figura 1.4: AO in configurazione non invertente

$$V_s = V_+ = V_- = V_o \frac{R_1}{R_1 + R_2} = \beta V_o \quad (1.2)$$

Da cui:

$$\frac{V_{out}}{V_s} = 1 + \frac{R_2}{R_1} = \frac{1}{\beta} \quad (1.3)$$

Nella (1.3) si è posto:

$$\beta = \frac{V_-}{V_{out}} = \frac{V_{out} \frac{R_1}{R_1 + R_2}}{V_{out}} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad (1.4)$$

in quanto il partitore di tensione costituito dalla serie R_1 - R_2 identifica in questo caso la rete β di fig. 1.3.

Per il circuito di fig. 1.4, essendo $R_{id} = \infty$, la resistenza vista dal generatore V_s (indicata come R_{if} , dove il pedice f sta per 'feedback') è infinita. La resistenza vista dal terminale di uscita, R_{of} , è invece nulla: questo risultato deriva sia dal fatto che $R_{out} = 0 \Omega$, che dal fatto di avere $A = \infty$. Analiticamente questo risultato si ricava calcolando la resistenza equivalente di Thevenin vista dal terminale di uscita in presenza di R_{out} ed A di valore finito, e quindi passando al limite per R_{out} tendente a zero e/o per A tendente ad infinito, come risulterà più chiaro nei paragrafi successivi. In ogni caso questo risultato è in linea con quanto previsto dalla teoria della retroazione per un amplificatore retroazionato negativamente con rete di prelievo di tipo parallelo.

Configurazione invertente

Applicando il principio delle masse virtuali al circuito di fig. 1.5 si ottiene $V_+ = V_- = 0 \text{ V}$, ed effettuando il bilancio delle correnti al terminale invertente dell'AO si ottiene:

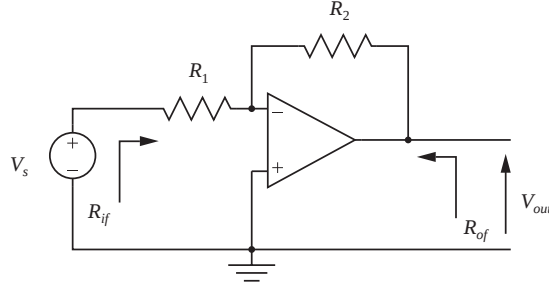


Figura 1.5: AO in configurazione invertente

$$\frac{V_s - V_-}{R_1} = \frac{V_- - V_{out}}{R_2} \quad (1.5)$$

da cui, essendo $V_- = 0$ V, si ottiene:

$$\frac{V_{out}}{V_s} = -\frac{R_2}{R_1} = 1 - \frac{1}{\beta} \quad (1.6)$$

Per il circuito di fig. 1.5 la resistenza R_{if} vista dal generatore V_s è R_1 , (il terminale invertente è un punto di massa virtuale), mentre la resistenza R_{of} è, come per il circuito di fig. 1.4, nulla.

Nota: il risultato in (1.6) sembra in contrasto con la teoria della retroazione, secondo la quale il guadagno A_f di un amplificatore retroazionato è espresso dalla relazione

$$A_f = \frac{A_{OL}}{1 + \beta A_{OL}} \approx \frac{1}{\beta} \quad \text{per } \beta A_{OL} \gg 1 \quad (1.7)$$

La discordanza nasce dal fatto che il circuito di fig. 1.4 presenta una retroazione serie-parallelo, mentre il circuito di fig. 1.5 una retroazione parallelo-parallelo. La definizione di β in (1.4), così come il modello lineare adottato per l'AO, sono congruenti con la teoria richiamata nel cap. 1.1 per gli amplificatori retroazionati quando si consideri una retroazione di tipo serie-parallelo. Non lo sono invece nel caso di fig. 1.5 (retroazione parallelo-parallelo): il segnale x_o , con riferimento alla notazione di figura 1.3 è ancora una tensione come nel circuito di fig. 1.4, ma x_f è in questo caso una corrente.

Il guadagno del circuito di fig. 1.5 è riconducibile alla forma generale (1.7) se il circuito di fig. 1.5 viene modificato come in fig. 1.6, in cui il generatore

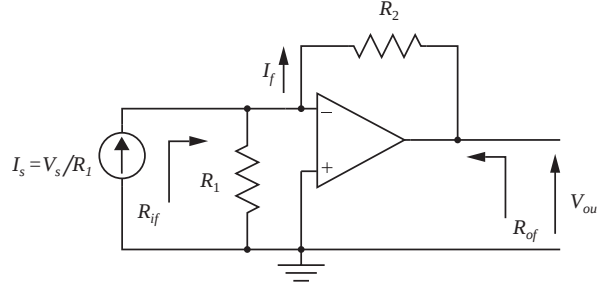


Figura 1.6: AO in configurazione invertente modificato

V_s è stato sostituito con l'equivalente di Norton I_s visto dall'ingresso dell'amplificatore ($I_s = V_s/R_1$), e l'AO va quindi modellato come un amplificatore di transresistenza con guadagno ad anello aperto R_{OL} . Le espressioni del guadagno della rete di retroazione e del guadagno dell'amplificatore retroazionato sarebbero quindi state, in questo caso:

$$\beta' = \frac{I_f}{V_{out}} = \frac{\frac{V_- - V_{out}}{R_2}}{V_{out}} = -\frac{1}{R_2} \quad (1.8)$$

$$\frac{V_{out}}{I_s} = \frac{R_{OL}}{1 + \beta' R_{OL}} \approx \frac{1}{\beta'} \quad \text{per } \beta' R_{OL} \gg 1 \quad (1.9)$$

Nella (1.8) si è utilizzato l'apice per distinguere il guadagno della rete di retroazione qui calcolato da quello calcolato nella (1.4). Con questa definizione il risultato (1.3) è in linea con quanto richiamato nel cap. 1.1, infatti:

$$\frac{V_{out}}{V_s} = \frac{V_{out}}{I_s} \frac{1}{R_1} = \frac{1}{\beta'} \frac{1}{R_1} = -\frac{R_2}{R_1} = 1 - \frac{1}{\beta} \quad (1.10)$$

A completamento di quanto detto si sottolinea come, con riferimento all'eq. (1.7), il guadagno di anello βA_{OL} possa essere calcolato, ottenendo il risultato corretto, a partire da definizioni diverse di β e di A_{OL} purché tra loro congruenti. Nel caso specifico interessa far vedere che si ottiene lo stesso risultato se β e A_{OL} sono rispettivamente un guadagno di transconduttanza ed un guadagno di transresistenza, oppure se sono entrambi guadagni di tensione. Infatti, con riferimento alla fig. 1.7, il guadagno di anello può essere calcolato annullando x_s , aprendo l'anello di retroazione (ad esempio in corrispondenza dell'uscita), applicando un generatore indipendente x_{test} all'ingresso della rete di retroazione e calcolando

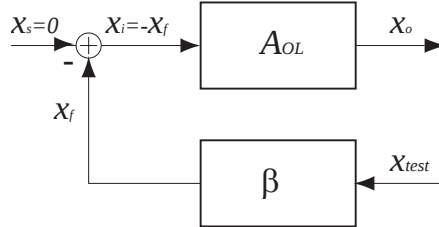


Figura 1.7: Schema a blocchi per valutare il guadagno di anello

il guadagno x_o/x_{test} (ovviamente x_o e x_{test} devono essere grandezze dello stesso tipo, ovvero entrambe tensioni o correnti). E' evidente come sul guadagno in questione la grandezza x_f all'uscita della rete di retroazione (ed in ingresso, cambiata di segno, al blocco A_{OL}) sia ininfluente, e come il risultato ovviamente non cambi sia che x_f sia una tensione oppure una corrente:

$$\beta A_{OL} = \frac{x_f}{x_{test}} \left(-\frac{x_o}{x_f} \right) = -\frac{x_o}{x_{test}} \quad (1.11)$$

In questa trattazione verrà sempre adottata la definizione di β data nella eq. (1.4). Le relazioni che verranno ricavate per guadagno e resistenze di ingresso e di uscita dell'AO in configurazione non invertente, quando nei prossimi paragrafi verranno rimosse le ipotesi di idealità, saranno quindi in linea con i risultati della teoria della retroazione negativa richiamata nel cap. 1.1. Le relazioni ricavate per l'AO in configurazione invertente saranno invece diverse, in generale, per le ragioni suddette.

1.3 Amplificatore Operazionale Reale

Per analizzare il funzionamento dell'AO reale è necessario richiamare la struttura interna di questo componente. Lo schema semplificato della struttura interna di un AO reale, indipendentemente dalla tecnologia con cui è realizzato, è mostrato in fig. 1.8, in cui sono evidenziati due blocchi: lo stadio di ingresso è un amplificatore differenziale, il secondo stadio un amplificatore *single ended*. A questi due stadi può seguire uno stadio di uscita, tipicamente un inseguitore di tensione con bassa resistenza di uscita e capacità di pilotaggio in corrente (si tratta cioè di uno stadio con guadagno di tensione unitario e guadagno in corrente maggiore di uno, tipicamente un *push-pull* in classe AB). In un generico amplificatore possono

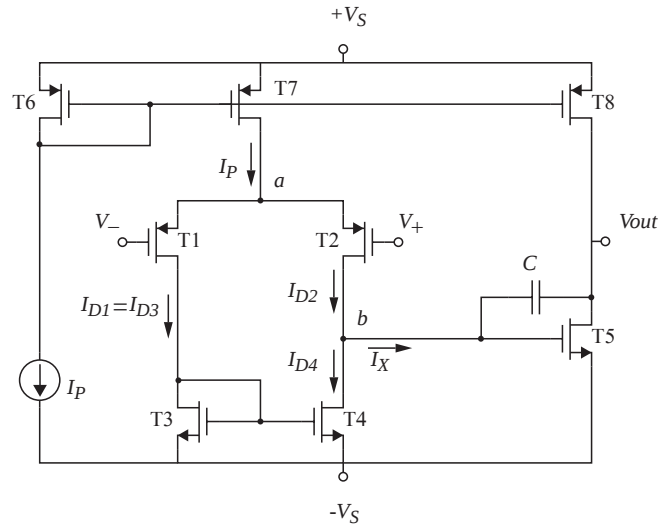


Figura 1.8: Circuito semplificato della struttura interna di un AO reale

essere presenti più amplificatori differenziali in cascata e più amplificatori *single ended*, anch'essi in cascata.

Gli AO reali possono essere realizzati con transistor bipolari (BJT), ad effetto di campo (JFET, MOSFET), o con tecnologie miste, come verrà evidenziato nel corso della trattazione.

La funzione dello stadio di ingresso è quello di amplificare la tensione differenziale $V_{id} = V_+ - V_-$ convertendola in un segnale *single ended*. Il secondo stadio fornisce una ulteriore amplificazione e, almeno per molti AO, è responsabile del comportamento in frequenza a singolo polo dell'AO (questo concetto verrà ripreso nel paragrafo 1.3.4). Il circuito è dimensionato affinché per $V_+ = V_- = 0$ V, l'uscita V_{out} sia anch'essa nulla.

Particolarmente influente sul comportamento degli AO è lo stadio differenziale di ingresso. Un amplificatore differenziale basa il suo funzionamento sul fatto che il circuito sia simmetrico, ovvero che i due transistor di ingresso siano tra loro uguali, così come i due transistor di carico. In queste condizioni, con riferimento alla fig. 1.8, per $V_{id} = 0$ V, su ciascuno dei due rami del circuito scorre una corrente $I_{D1} = I_{D2} = I_{D3} = I_{D4} = I_P/2$, ed è nulla la corrente I_X (con I_{Di} si indica la corrente di drain del transistor Ti). Se $V_{id} \neq 0$ V, allora $I_{D1} \neq I_{D2}$. Si ha comunque che, per la configurazione a specchio di corrente di $T3$ e $T4$, $I_{D3} = I_{D4} = I_{D1}$. Quindi, eseguendo il bilancio delle correnti al nodo b , si ottiene una corrente uscente verso il secondo stadio di valore $I_X = I_{D2} - I_{D4} = I_{D2} - I_{D1}$, che in regime di piccoli segnali è proporzionale a V_{id} (la corrente suddetta sarà in particolare uscente o entrante nel nodo b a seconda che $I_{D2} - I_{D1}$ sia una quantità

positiva o negativa, ovvero a seconda che V_{id} sia minore o maggiore di zero). Inoltre, per il bilancio delle correnti al nodo a , si ha che $I_{D1} + I_{D2} = I_P$, e che quindi $|I_X| \leq I_P$.

Da queste osservazioni risulta evidente come l'AO ideale illustrato nel paragrafo 1.2 descriva solo in prima approssimazione il comportamento di un AO reale (anche se, come verrà sottolineato nel corso della trattazione, si tratta di un'approssimazione giustificata in molti situazioni applicative). Solo qualche esempio:

- Il guadagno differenziale complessivo dell'AO è finito ed uguale, con riferimento alla fig. 1.8, al prodotto dei guadagni degli stadi che lo compongono. Il guadagno di ciascuno di questi stadi ha inoltre un comportamento definitivamente passa basso, quindi il guadagno dell'AO, oltre ad essere finito, risulta dipendente dalla frequenza con comportamento passa basso.
- La resistenza differenziale di ingresso R_{id} e la resistenza di uscita R_{out} del modello lineare dell'AO nel par. 1.2 hanno entrambe valore finito non nullo, che è funzione sia della tecnologia che della topologia circuitale utilizzata. E' inoltre necessario considerare, in funzione delle specifiche applicazioni, la resistenza di ciascuno dei due terminali di ingresso verso massa.
- Le correnti entranti nei terminali invertente e non invertente non possono essere considerate nulle, in particolar modo se la tecnologia con cui è realizzato l'amplificatore è bipolare, e per la corrente di uscita vanno presi in considerazione i limiti di pilotaggio in corrente dello stadio finale.
- Le tensioni applicabili ai terminali di ingresso non possono assumere qualsiasi valore se si vuole garantire il corretto funzionamento del circuito, ma deve essere in generale $-V_S < V_-$, $V_+ < +V_S$. Le stesse tensioni di alimentazione $-V_S$ e $+V_S$ hanno in generale un valore minimo imposto dalla topologia circuitale ed un valore massimo fissato dalla tecnologia.
- Il valore assunto dall'uscita non può essere completamente indipendente dal segnale di ingresso di modo comune, che influisce sulla polarizzazione dei transistor con cui lo stadio è realizzato (si consideri, ad esempio, che sia il generatore di corrente I_P in fig. 1.8 che il circuito di carico costituito dai transistor T3 e T4 richiedono un valore minimo di tensione ai capi per funzionare correttamente). Inoltre i valori massimi e minimi della tensione di uscita, a seconda della configurazione circuitale dello stadio finale dell'AO, potranno essere rispettivamente $< +V_S$ e $> -V_S$ (gli AO in cui la tensione di uscita può variare in tutto l'intervallo $[-V_S, V_S]$ si dicono *rail to rail*).

- Con riferimento allo stadio di ingresso differenziale, la completa uguaglianza dei due rami del circuito non può essere garantita da alcun processo tecnologico: nel comportamento dell'AO reale va tenuto conto anche degli effetti di non simmetria dell'amplificatore differenziale.
- Ancora in riferimento al funzionamento dell'amplificatore differenziale, la corrente I_X in fig. 1.8 è limitata, e dunque la velocità massima con cui può variare l'uscita del secondo stadio a causa della presenza della capacità C è anch'essa limitata: questo determina comportamenti non lineari dell'AO di comune verifica sperimentale.

Gli aspetti del funzionamento di un AO reale a cui si è accennato qualitativamente in questo paragrafo, e molti altri a cui non si è accennato, trovano riscontro quantitativo in una serie di raccomandazioni sulle modalità di utilizzo degli AO¹, e nei valori di una serie di parametri (fino ad alcune decine) che il produttore riporta nel *data sheet* di ogni AO. In particolare, di tali parametri vengono forniti dal produttore valori tipici ed intervallo di variazione, ovvero valori massimi e minimi, che sono stati determinati dal produttore attraverso misure su un numero elevato di circuiti nominalmente identici, per varie temperature nell'intervallo di temperature di funzionamento ammesse. Avendo la maggior parte di detti parametri una distribuzione normale, il valore tipico riportato dai *data sheet*, a parte poche eccezioni, corrisponde al valor medio della distribuzione. Non c'è invece uniformità tra i produttori, e non c'è stata nel corso degli anni per il singolo produttore, nella definizione dei valori massimo e minimo (attualmente, ad esempio, Texas Instruments adotta per i valori massimo e minimo della maggior parte dei parametri i valori della distribuzione a $\pm 6\sigma$).

Nei prossimi paragrafi i principali parametri degli AO verranno trattati in dettaglio, riportandone i valori tipici (eventualmente in funzione delle varie tecnologie realizzative) e discutendone l'effetto sul funzionamento dell'AO nelle due configurazioni di riferimento, ovvero quella invertente e quella non invertente, rispetto al funzionamento discusso nel caso ideale.

¹Sui *data sheet* degli AO sono riportati, per alcune grandezze, dei valori limite (*absolute maximum ratings*) superando i quali si va incontro a comportamenti imprevedibili del circuito, ed al rischio di provocare allo stesso danni permanenti. I valori massimi suddetti vengono specificati, in genere, per: tensioni di alimentazione, tensione differenziale di ingresso, dinamica degli ingressi, corrente di ingresso e di uscita, corrente totale erogata dalle alimentazioni, potenza dissipata, temperatura di lavoro, periodo in cui il circuito eroga corrente in condizioni di corto circuito dell'uscita. Per la maggior parte dei parametri sopra riportati vengono anche specificati degli intervalli raccomandati di utilizzo (*recommended operating conditions*), rispettando i quali il costruttore garantisce il comportamento *standard* del dispositivo.

1.3.1 Effetti del guadagno differenziale ad anello aperto di valore finito

Come già accennato, il guadagno differenziale ad anello aperto di un AO è finito e dipende dalla frequenza, ovvero, facendo riferimento alla fig.1.1.b., $A = A(\omega)$. In questo paragrafo non si considera la dipendenza dalla frequenza, i cui effetti verranno discussi nel paragrafo 1.3.4, e verrà fatto riferimento al valore *in continua* del guadagno, $A_o = A(0)$, con A_o numero reale.

I valori tipici di A_o sono compresi tra 10^4 e 10^6 , ovvero tra 80 dB e 120 dB.

Supporre A_o finito implica che la caratteristica $V_{out} - V_{id}$ sia diversa da quella riportata in figura 1.2: in particolare, il tratto a pendenza verticale è sostituito da un tratto a pendenza A_o , che intercetta le due rette orizzontali di valori $+V_S$ e $-V_S$ rispettivamente per $V_{id} = +V_S/A_o$ e $V_{id} = -V_S/A_o$. In altre parole, per $-V_S < V_{out} < +V_S$ non è più esatto supporre $V_{id} = 0V$. I valori che può assumere V_{id} per $-V_S < V_{out} < +V_S$ sono però tali per cui, nella maggior parte delle applicazioni, il principio delle masse virtuali si può in prima approssimazione ritenere valido. Si consideri, ad esempio, $+V_S = -(-V_S) = 15V$ (questo valore della tensione di alimentazione è un limite superiore per la maggior parte degli AO), e per A_o il valore minimo 10^4 : in queste condizioni limite la tensione V_{id} è comunque compresa, per $-V_S < V_{out} < +V_S$, nell'intervallo $(-1.5, 1.5)$ mV.

Se si considera $A_o \neq \infty$, le relazioni trovate nel paragrafo 1.2.2 per il guadagno delle due configurazioni non invertente ed invertente si modificano.

Configurazione non invertente

In riferimento alla fig.1.4 si ha:

$$V_{out} = A_o V_{id} = A_o (V_s - V_-) = A_o (V_s - \beta V_{out}) \quad (1.12)$$

da cui

$$A_f = \frac{V_{out}}{V_s} = \frac{A_o}{1 + \beta A_o} = \frac{1}{\beta} \frac{\beta A_o}{1 + \beta A_o} \quad (1.13)$$

Configurazione invertente

Ragionando allo stesso modo per il circuito di fig.1.5 si ha:

$$V_{out} = A_o V_{id} = A_o (V_+ - V_-) = A_o (-V_-) \quad (1.14)$$

ed essendo, per il principio di sovrapposizione degli effetti,

$$V_- = V_s \frac{R_2}{R_1 + R_2} + V_{out} \frac{R_1}{R_1 + R_2} = V_s (1 - \beta) + V_{out} \beta \quad (1.15)$$

sostituendo nell'eq. 1.14 si ottiene:

$$A_f = \frac{V_{out}}{V_s} = (\beta - 1) \frac{A_o}{1 + \beta A_o} = \left(1 - \frac{1}{\beta}\right) \frac{\beta A_o}{1 + \beta A_o} \quad (1.16)$$

Nota: rispetto alle relazioni 1.3 e 1.6, nelle 1.13 e 1.16 compare il fattore $\frac{\beta A_o}{1 + \beta A_o}$ che tende ad 1 al tendere del guadagno di anello βA_o ad ∞ . In altri termini, l'errore relativo che si commette utilizzando la 1.3 al posto della 1.13 (o la 1.6 al posto della 1.16), dato dall'espressione

$$ERR = \frac{\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta} \frac{\beta A_o}{1 + \beta A_o}}{\frac{1}{\beta}} = \frac{1}{1 + \beta A_o} \quad (1.17)$$

tende a zero al crescere del guadagno di anello. Valori tipici del guadagno di anello in continua sono almeno dell'ordine di 10^3 , corrispondente ad un errore relativo $\leq 10^{-3}$, trascurabile in molte applicazioni.

1.3.2 Effetti della resistenza di ingresso di valore finito e della resistenza di uscita non nulla

In un AO reale R_{id} , ovvero la resistenza alle variazioni vista tra i due terminali di ingresso quando entrambi sono sconnessi da massa, ha valore finito. I valori tipici di questo parametro variano a seconda della tecnologia con cui è realizzato lo stadio di ingresso dell'AO, e variano da $10^7 \Omega$ se questo è realizzato in tecnologia bipolare, a $10^{12} \Omega$ per ingressi realizzati con transistor ad effetto di campo ².

La resistenza di uscita R_o , ovvero la resistenza alle variazioni vista tra il terminale di uscita e massa, assume in un AO reale valori compresi tipicamente tra 50Ω e 200Ω , in funzione della configurazione e della tecnologia realizzativa dello stadio di uscita. Come considerazione generale, gli stadi di uscita ad emettitore comune (BJT) e a source comune (CMOS), utilizzati negli AO *rail to rail* (in cui cioè la tensione di uscita può variare in tutto l'intervallo $[-V_S, +V_S]$), presentano resistenze R_o di valore più elevato rispetto agli stadi ad inseguitore di emettitore o ad inseguitore di source.

Il fatto di avere R_{id} ed R_o di valore finito non nullo influisce sulle resistenze R_{if} ed R_{of} delle configurazioni invertente e non invertente. L'effetto verrà discusso tenendo in considerazione il fatto che le resistenze R_1 ed R_2 nelle fig. 1.4 e 1.5 hanno valori tipicamente compresi tra $10^3 \Omega$ (la capacità di pilotaggio in corrente

²In realtà nei data sheet ci sono più parametri per descrivere in generale l'impedenza di ingresso degli AO, che tengono conto anche delle resistenze di modo comune viste da ciascuno dei terminali e delle componenti capacitive ad esse associate. Questi parametri verranno discussi nel paragrafo 1.3.6.

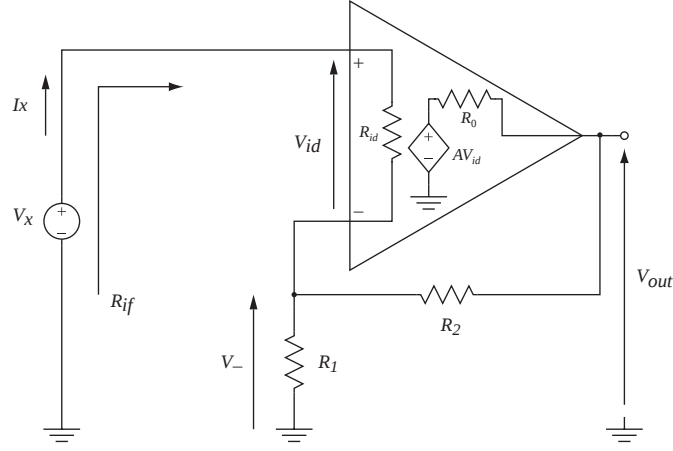


Figura 1.9: AO in configurazione non invertente: circuito per il calcolo di R_{if} .

degli stadi di uscita degli AO non supera tipicamente i 10 – 20 mA) e $10^5 \Omega$. R_1 ed R_2 sono quindi almeno due ordini di grandezza più piccole di R_{id} , ed almeno un ordine di grandezza più grandi di R_o).

Configurazione non invertente

Facendo riferimento alla fig. 1.9, sfruttando il principio di sovrapposizione degli effetti, si ha che:

$$R_{if} = \frac{V_x}{I_x} = \frac{1}{I_x} (R_{id} I_x + V_-) \quad (1.18)$$

dove:

$$\begin{aligned} V_- &= V_x \frac{R_1 \parallel (R_2 + R_o)}{R_1 \parallel (R_2 + R_o) + R_{id}} + A_o V_{id} \frac{R_1 \parallel R_{id}}{R_1 \parallel R_{id} + R_2 + R_o} \\ &= V_x \alpha + A_o V_{id} \gamma \end{aligned} \quad (1.19)$$

Nella eq. 1.19, e nel resto di questo documento, con $R_i \parallel R_j$ si intende il parallelo di R_i ed R_j . Considerando che $\alpha \approx R_1/R_{id}$ è un fattore tipicamente $\leq 10^{-3}$, e che $\gamma \approx R_1/(R_1 + R_2 + R_o) \approx \beta$ con un errore tipicamente $< 10^{-1}$, la eq. 1.19 si può approssimare con

$$V_- \approx A_o V_{id} \beta \quad (1.20)$$

e quindi la eq. 1.18 diviene:

$$R_{if} = \frac{V_x}{I_x} \approx \frac{1}{I_x} (R_{id} I_x + A_o V_{id} \beta) = \frac{1}{I_x} [R_{id} I_x (1 + A_o \beta)] = R_{id} (1 + A_o \beta) \quad (1.21)$$

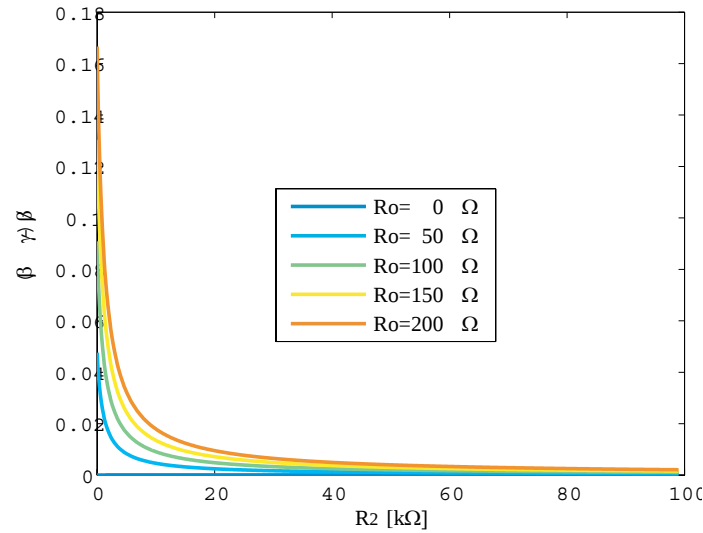


Figura 1.10: Errore relativo in funzione di R_2 e di R_o , commesso approssimando γ con β , per $R_1 = 10^3 \Omega$ ed $R_{id} = 10^7 \Omega$.

Nota: nell'eq. 1.20 l'approssimazione più critica è quella della quantità γ con il fattore di retroazione β . A supporto della bontà della approssimazione, in fig. 1.10 è riportato, in funzione di R_2 ed al variare di R_o tra 0Ω e 200Ω , l'errore relativo $(\beta - \gamma)/\beta$ commesso approssimando γ con β . Le curve in fig. 1.10 sono state ottenute per $R_1 = 10^3 \Omega$ ed $R_{id} = 10^7 \Omega$.

Il circuito per il calcolo della resistenza equivalente di Thevenin R_{of} vista dal terminale di uscita è riportato in fig. 1.11. In questo caso si ha

$$\begin{aligned}
 I_x = I_1 + I_2 &= \frac{V_x}{R_1 \parallel R_{id} + R_2} + \frac{V_x - A_o V_{id}}{R_o} \\
 &= \frac{V_x}{R_1 \parallel R_{id} + R_2} + \frac{V_x + A_o V_-}{R_o} \\
 &\approx \frac{V_x}{R_1 + R_2} + \frac{V_x(1 + A_o \beta)}{R_o} \quad (1.22)
 \end{aligned}$$

dove si sono usate le stesse approssimazioni utilizzate per il calcolo di R_{if} . Dalla eq. 1.22 si ottiene quindi:

$$R_{of} = \frac{V_x}{I_x} \approx \left(\frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{(1 + A_o \beta)}{R_o} \right)^{-1} = \frac{R_o}{(1 + A_o \beta)} \parallel (R_1 + R_2) \quad (1.23)$$

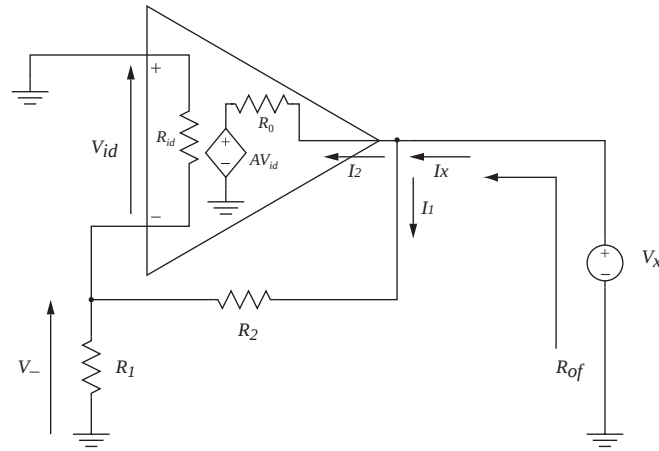


Figura 1.11: AO in configurazione non invertente: circuito per il calcolo di R_{of} .

Risulta evidente dalla eq. 1.23 che, se $\beta A_o \gg 1$, R_{of} diventa una quantità praticamente trascurabile.

Configurazione invertente

Nel caso dell'AO in configurazione invertente il circuito per il calcolo di R_{if} è riportato in fig. 1.12.a, da cui risulta:

$$R_{if} = R_1 + R'_{if} \quad (1.24)$$

Applicando il generatore V_x direttamente al terminale invertente dell'AO come in fig. 1.12.b, ed eseguendo il bilancio delle correnti al terminale invertente, si ottiene:

$$I_x = I_1 + I_2 = \frac{V_x - A_o V_{id}}{R_2 + R_o} + \frac{V_x}{R_{id}} = \frac{V_x(1 + A_o)}{R_2 + R_o} + \frac{V_x}{R_{id}} \quad (1.25)$$

da cui:

$$R'_{if} = \frac{V_x}{I_x} = \left(\frac{1 + A_o}{R_2 + R_o} + \frac{1}{R_{id}} \right)^{-1} = \frac{R_2 + R_o}{1 + A_o} \parallel R_{id} \quad (1.26)$$

In definitiva si ha quindi:

$$R_{if} = R_1 + \frac{R_2 + R_o}{1 + A_o} \parallel R_{id} \approx R_1 \quad (1.27)$$

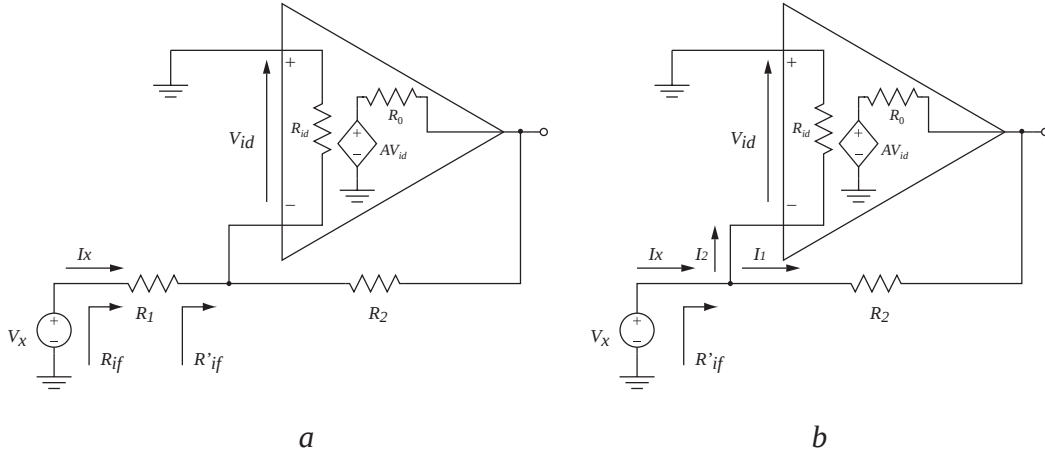


Figura 1.12: AO in configurazione invertente: circuito per il calcolo di R_{if} .

Per quanto riguarda R_{of} , il circuito da utilizzare per il calcolo è ancora quello di fig. 1.11, pertanto anche per l'AO in configurazione invertente vale l'eq. 1.23.

Nota. Considerare nel circuito equivalente dell'AO valori finiti non nulli per R_{id} e R_o comporta che il guadagno A_f non sia esattamente quello calcolato nelle eq. 1.13 e 1.16. Si consideri ad esempio l'AO in configurazione non invertente, e si faccia riferimento al circuito di fig. 1.9 con $V_x = V_s$. Si ha, analogamente a quanto già visto ricavando l'eq. 1.19

$$\begin{aligned} V_- &= V_s \frac{R_1 \parallel (R_2 + R_o)}{R_1 \parallel (R_2 + R_o) + R_{id}} + A_o V_{id} \frac{R_1 \parallel R_{id}}{R_1 \parallel R_{id} + R_2 + R_o} \\ &= V_s \alpha + A_o V_{id} \gamma = V_s \alpha + A_o (V_s - V_-) \gamma \end{aligned} \quad (1.28)$$

e quindi:

$$V_- = \frac{V_s (\alpha + \gamma A_o)}{1 + \gamma A_o} \quad (1.29)$$

Dal circuito in fig. 1.9 risulta inoltre

$$V_{out} = (A_o V_{id} - V_-) \frac{R_2}{R_o + R_2} + V_- \quad (1.30)$$

da cui si ricava, ponendo $\delta = R_2 / (R_o + R_2)$ e sostituendo l'espressione di V_-

data dall'eq.1.29

$$\begin{aligned}
 A_f = \frac{V_{out}}{V_s} &= \frac{A_o \delta(1 - \alpha) + (\alpha + \gamma A_o)(1 - \delta)}{1 + \gamma A_o} \\
 &= \frac{1}{\beta} \frac{\beta A_o}{1 + \beta A_o} \frac{\delta(1 - \alpha) + \frac{(\alpha + \gamma A_o)(1 - \delta)}{A_o}}{\frac{1 + \gamma A_o}{1 + \beta A_o}} \\
 &= \frac{1}{\beta} \frac{\beta A_o}{1 + \beta A_o} \Delta
 \end{aligned} \tag{1.31}$$

Il fattore Δ nella eq.1.31 tiene conto degli effetti di carico per l'AO dati dalla rete di retroazione sia sull'ingresso (α) che sull'uscita (γ , δ). Il fattore Δ , è prossimo all'unità e può essere trascurato, in prima approssimazione, nella maggior parte dei casi. In figura 1.13 è riportato, a titolo di esempio, l'errore relativo $1 - \Delta$ che si commette valutando A_f mediante la 1.13 anziché mediante la 1.31, al variare di β tra 1 e 10^{-2} e di R_o tra 0 Ω e 200 Ω , per $R_{id} = 10^7 \Omega$, $R_1 = 10^3 \Omega$ e $A_o = 10^5$.

Va ancora osservato che la presenza del fattore Δ in 1.31 non è in contrasto con la teoria della retroazione: infatti, con riferimento alla fig. 1.3, la teoria suddetta è sviluppata supponendo che il guadagno di anello aperto A_{OL} comprenda già gli effetti di carico dovuti non solo alla rete di retroazione β , ma anche al carico pilotato dall'amplificatore e alla resistenza interna del generatore V_s (questi ultimi non considerati nel ricavare l'eq. 1.31).

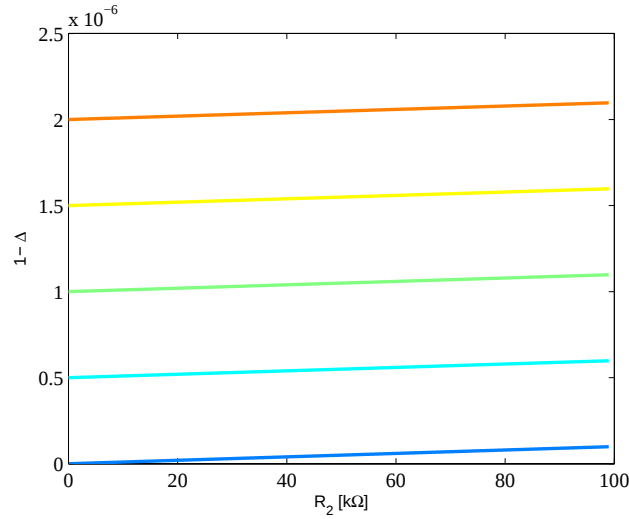


Figura 1.13: Errore relativo $1 - \Delta$ commesso valutando A_f mediante la 1.13 anziché mediante la 1.31 ($A_o = 10^5$, $R_1 = 10^3 \Omega$ ed $R_{id} = 10^7 \Omega$).

1.3.3 Ulteriori non idealità degli AO dovute allo stadio di ingresso

Prima di proseguire, si riassumono le relazioni fin qui ricavate (valide in continua) per L'AO in configurazione non invertente ed invertente:

	A_f	R_{if}	R_{of}
AO non inv.	$\approx \frac{1}{\beta} \frac{\beta A_o}{1 + \beta A_o}$	$\approx R_{id}(1 + A_o \beta)$	$\approx \frac{R_o}{(1 + A_o \beta)} \parallel (R_1 + R_2)$
AO inv.	$\approx (1 - \frac{1}{\beta}) \frac{\beta A_o}{1 + \beta A_o}$	$R_1 + \frac{R_2 + R_o}{1 + A_o} \parallel R_{id}$	$\approx \frac{R_o}{(1 + A_o \beta)} \parallel (R_1 + R_2)$

Nel par. 1.3 si è accennato a caratteristiche dell'AO reale dovute allo stadio differenziale di ingresso del dispositivo. Tra queste caratteristiche, alcune, come la presenza di *correnti continue di polarizzazione* entranti o uscenti dai terminali invertente e non invertente, sarebbero presenti anche se l'amplificatore differenziale di ingresso fosse perfettamente simmetrico (ovvero, con riferimento alla fig. 1.8, se i transistor T1 e T2 ed i transistor T3 e T4 fossero identici). Altre caratteristiche dell'AO reale (ad es. la *tensione di offset di ingresso* e la *corrente di offset di ingresso*) sono invece dovute alla non perfetta simmetria dello stadio di ingresso.

In ogni caso, gli effetti di tutte le non idealità dello stadio di ingresso analizzate in questo paragrafo verranno modellati mediante generatori ideali indipendenti di

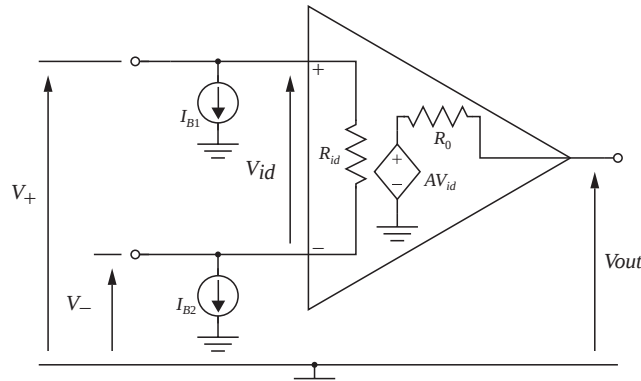


Figura 1.14: Modello lineare dell'AO con incluse le correnti di polarizzazione

tensione o di corrente da porre in ingresso all'AO. Pertanto l'analisi svolta nei paragrafi precedenti per l'AO in configurazione invertente e non invertente, i cui risultati sono riassunti nella tabella all'inizio di questo paragrafo, rimane valida anche in presenza delle suddette non idealità.

Correnti di polarizzazione

La presenza nel modello lineare dell'AO della resistenza R_{id} di valore finito implica già che non si possano considerare nulle le correnti I_+ ed I_- . A questo si aggiunge il fatto che i transistor di ingresso dell'amplificatore differenziale che costituisce lo stadio di ingresso dell'AO richiedono in generale una corrente continua di polarizzazione, di valore diverso a seconda della tecnologia con cui l'amplificatore differenziale è realizzato. L'ordine di grandezza del valore tipico di queste correnti è 10^{-8} A per stadi di ingresso a BJT, 10^{-11} A per stadi di ingresso a JFET, 10^{-14} A per stadi di ingresso a MOS. Nel modello dell'AO reale si tiene conto di queste correnti di polarizzazione con due generatori I_{B1} ed I_{B2} rispettivamente tra il terminale non invertente e massa e tra il terminale invertente e massa. Il verso delle correnti I_{B1} ed I_{B2} dipende, fissata la tecnologia, dal tipo dei transistor di ingresso (BJT di tipo PNP o NPN, JFET di tipo N o P, MOS di tipo N o P).

Il modello di fig. 1.1 si può modificare, per tenere conto delle correnti I_{B1} ed I_{B2} , come in fig. 1.14 dove, come accennato nell'introduzione a questo paragrafo, i due generatori I_{B1} ed I_{B2} sono da considerare come due ingressi aggiuntivi per il circuito in cui l'AO è inserito. A titolo di esempio si considerino le due configurazioni non invertente (fig. 1.15.a) ed invertente (fig. 1.15.b), per le quali il contributo delle correnti I_{B1} ed I_{B2} sulla tensione V_{out} si può ottenere applicando il principio di sovrapposizione degli effetti. In (fig. 1.15.a), il contributo

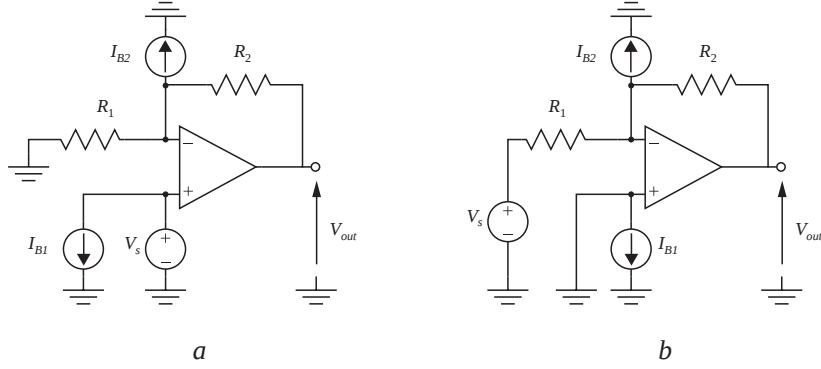


Figura 1.15: AO in configurazione non invertente (a) ed invertente (b) con incluse le correnti di polarizzazione

di I_{B1} è chiaramente nullo perchè, cortocircuitando il generatore V_s , si cortocircuita anche I_{B1} . Per quanto riguarda I_{B2} , adottando per l'AO il modello di fig. 1.14, effettuando il bilancio delle correnti al morsetto invertente trascurando R_o , e ricordando che in questo caso $-V_- = V_{out}/A_o$, si ottiene:

$$\begin{aligned} I_{B2} &= -\frac{V_-}{R_1 \parallel R_{id}} - \frac{V_- - V_{out}}{R_2} \\ &= V_{out} \left(\frac{1}{A_o (R_1 \parallel R_{id})} + \frac{1}{A_o R_2} + \frac{1}{R_2} \right) \approx \frac{V_{out}}{R_2} \end{aligned} \quad (1.32)$$

da cui si ricava $V_{out} \approx I_{B2} R_2$. Ovviamente, se I_{B2} avesse avuto verso opposto, si sarebbe avuto $V_{out} \approx -I_{B2} R_2$. Lo stesso risultato si ottiene per il circuito di fig. 1.15.b.

Il valore di I_{B1} ed I_{B2} è nominalmente lo stesso ma, come discusso commentando il circuito di fig. 1.8, lo stadio di ingresso di un AO non è mai perfettamente simmetrico, e quindi I_{B1} ed I_{B2} sono in generale diverse. Questo è il motivo per cui nei data sheet vengono riportati due parametri, la *corrente di polarizzazione di ingresso* I_{iB} e la *corrente di offset di ingresso* I_{ioff} , definite rispettivamente come $I_{iB} = (I_{B1} + I_{B2})/2$ e $I_{ioff} = |I_{B1} - I_{B2}|$. Per quanto riguarda I_{ioff} , il valore assoluto è dovuto al fatto che a priori non è noto quale delle due correnti I_{B1} ed I_{B2} sia maggiore. In generale I_{ioff} è di un ordine di grandezza più piccola rispetto ad I_{iB} .

Tensione di offset di ingresso

Come già discusso, se lo stadio di ingresso di un AO fosse perfettamente simmetrico, la tensione di uscita V_o di un AO sarebbe nulla in presenza di una tensione differenziale (V_{id}) e di una tensione di modo comune nulle. Tuttavia, le tolleranze caratteristiche di qualunque processo implementativo fanno sì che questa condizione non si raggiunga mai in pratica, con la conseguenza che a riposo nei due rami dell'amplificatore differenziale (fig. 1.8) non scorra la stessa corrente, e che quindi la tensione di uscita V_o a riposo risulti non nulla. Per ottenere $V_o = 0$ V a riposo è necessario applicare in ingresso all'AO una tensione continua V_{id} non nulla, che prende il nome di *tensione di offset di ingresso* V_{IO} . Questa non idealità dell'AO viene inclusa nel modello di fig. 1.1, esattamente come avviene per le correnti di polarizzazione, mediante un generatore di tensione posto tra i terminali invertente e non invertente (fig. 1.16).

I valori tipici di V_{IO} variano tra 10^{-3} V e 10^{-4} V; la polarità del generatore non è nota a priori. Nel caso della tensione di offset il valore riportato nei data sheet non è il valor medio della distribuzione (che è nullo), ma il valore ad 1σ .³

Anche per valutare l'effetto della tensione di offset sull'uscita si può procedere come già visto per le correnti di polarizzazione. Con riferimento sia alla fig. 1.17.a che alla fig. 1.17.b, applicando il principio di sovrapposizione degli effetti si ha che per quanto riguarda la tensione di offset di ingresso entrambe le configurazioni si comportano come AO in configurazione non invertente, e quindi il contributo di V_{IO} sull'uscita è ottenibile direttamente dall'eq. 1.13.

Rapporto di reiezione di modo comune

Si è già accennato al fatto che il livello di tensione continua a cui si portano i terminali di ingresso di un AO influiscono sulla polarizzazione dei transistor di ingresso dello stadio differenziale, e quindi sulla tensione di uscita. Con riferimento alla fig. 1.18, nell'eq. 1.33 sono riportate le relazioni tra V_+ , V_- , *tensione di ingresso di modo comune* V_{ic} e *tensione di ingresso di modo differenziale* V_{id} .

³Nei data sheet, insieme a V_{IO} viene riportato il suo *coefficiente di temperatura medio* $\alpha(V_{IO})$, normalmente espresso in $\mu\text{V}/^\circ\text{C}$, e definito come il rapporto tra la differenza dei valori di V_{IO} misurati agli estremi dell'intervallo di temperatura ammesso (T_{max} e T_{min}), e $T_{max} - T_{min}$. Un altro parametro legato a V_{IO} è la sua *deriva a lungo termine*, espressa in $\mu\text{V}/\text{mese}$, che specifica come ci si aspetta che vari il valore di V_{IO} in seguito all'invecchiamento (si ricorda che l'invecchiamento dei semiconduttori modifica le caratteristiche dei dispositivi).

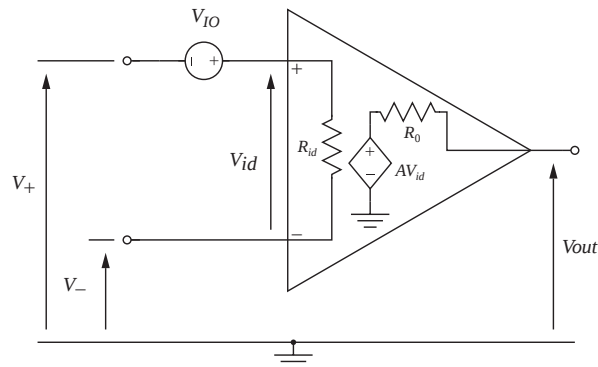


Figura 1.16: Modello alle variazioni dell'AO con inclusa la tensione di offset V_{IO}

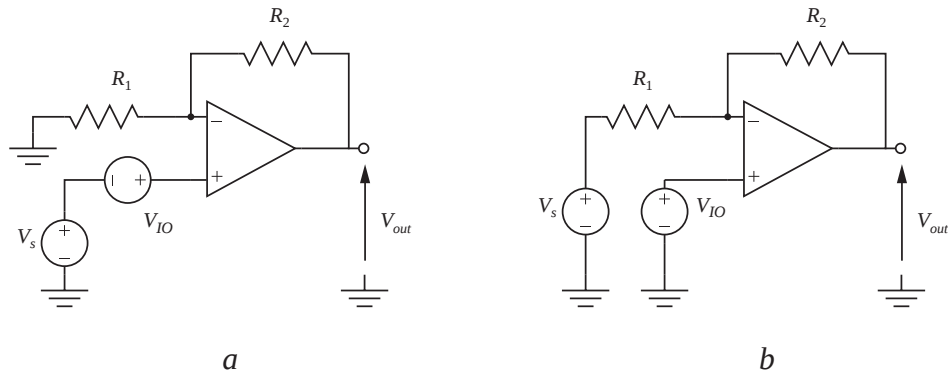


Figura 1.17: AO in configurazione non invertente (a) ed invertente (b) con incluso il generatore V_{IO}

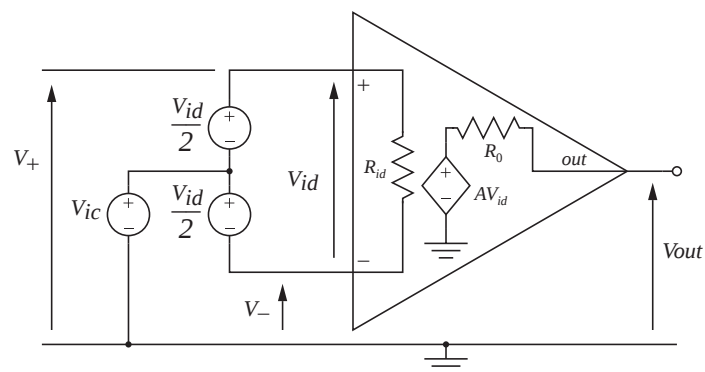


Figura 1.18: Tensione di ingresso di modo comune e di modo differenziale.

$$\begin{aligned}
V_{ic} &= \frac{V_+ + V_-}{2} & V_{id} &= V_+ - V_- \\
V_+ &= V_{ic} + \frac{V_{id}}{2} & V_- &= V_{ic} - \frac{V_{id}}{2}
\end{aligned}
\tag{1.33}$$

Indicato con A_{cmo} il guadagno di modo comune dell'AO in continua, e definito il *rapporto di reiezione di modo comune* (o $CMRR$) come il valore assoluto del rapporto tra il guadagno differenziale in continua A_o e A_{cmo} ⁴, la tensione di uscita V_{out} dell'AO è data da:

$$\begin{aligned}
V_{out} &= A_o V_{id} + A_{cmo} V_{ic} = A_o \left(V_{id} + \frac{A_{cmo}}{A_o} V_{ic} \right) \\
&= A_o \left(V_{id} \pm \frac{V_{ic}}{CMRR} \right)
\end{aligned}
\tag{1.34}$$

Il parametro $CMRR$ assume tipicamente valori compresi tra 80 dB e 120 dB. Come accennato si tratta di valori validi in continua: al crescere della frequenza il $CMRR$ diminuisce. La ragione principale è che, con riferimento alla fig. 1.8, a causa delle capacità parassite tra *gate* e *drain* dei transistor $T1$ e $T2$, al crescere della frequenza il guadagno di modo comune cresce. Inoltre, come verrà discusso nel paragrafo 1.3.4, il guadagno differenziale diminuisce al crescere della frequenza, dando complessivamente l'effetto suddetto.

Dall'eq. 1.34 risulta evidente come si possa tener conto dell'effetto del $CMRR$ di valore finito, in modo del tutto analogo a quanto fatto in fig. 1.16 per la tensione di offset di ingresso, mediante un generatore di tensione di valore $\frac{(V_+ + V_-)}{2 CMRR}$ posto tra i terminali invertente e non invertente. Anche in questo caso, come per V_{IO} , la polarità del generatore non è nota a priori. Per quanto riguarda l'effetto di questo generatore sulla tensione di uscita sia dell'AO in configurazione non invertente che invertente, vale quindi quanto detto nel paragrafo precedente per il generatore V_{IO} .

⁴Il valore del $CMRR$ riportato nei data sheet è effettivamente valutato in continua. In dettaglio, a causa delle dissimmetrie dell'amplificatore differenziale, modificare il punto di lavoro dei transistor di ingresso modifica la tensione di offset di ingresso V_{IO} e quindi la tensione di uscita. Il parametro riportato nei data sheet è quindi valutato come rapporto, in valore assoluto, tra le variazioni indotte di V_{IO} e le variazioni di V_{ic} .

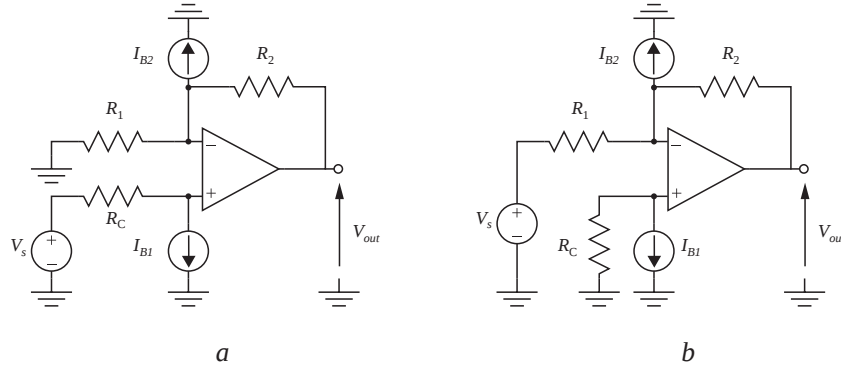


Figura 1.19: AO in configurazione non invertente (a) ed invertente (b) con resistenza di compensazione della corrente di polarizzazione

Compensazione degli effetti delle correnti di polarizzazione, della tensione e della corrente di offset di ingresso, della tensione di modo comune

Gli effetti sulla risposta dell'AO delle non idealità descritte in questo paragrafo possono essere compensati con opportuni accorgimenti circuitali.

Per quanto riguarda le correnti di polarizzazione I_{B1} ed I_{B2} si ricorre al circuito in fig. 1.19, in cui una resistenza R_C è posta in serie al terminale non invertente (se $R_C \ll R_{id}$ è facile verificare che non ha effetto apprezzabile sulle relazioni ricavate nei paragrafi 1.3.1 e 1.3.2). In questo modo, diversamente da quanto discusso precedentemente in questo paragrafo, I_{B1} ed I_{B2} danno entrambe un contributo, di segno opposto, alla tensione di uscita. L'effetto totale può essere complessivamente ridotto di almeno un ordine di grandezza rispetto ai singoli contributi dimensionando opportunamente R_C , come viene mostrato di seguito. In dettaglio, applicando il principio di sovrapposizione degli effetti, considerando il solo contributo di I_{B1} e supponendo che R_C sia dello stesso ordine di grandezza di R_1 ed R_2 si ottiene, per entrambi i circuiti di fig. 1.19 ed utilizzando per l'AO il modello di fig. 1.1:

$$V_+ \approx -I_{B1} R_C \parallel R_{id}(1 + \beta A_o) \approx -I_{B1} R_C \quad (1.35)$$

Sfruttando quindi le eq. 1.32, 1.35, e 1.13, e scegliendo $R_C = R_1 \parallel R_2$, il contributo complessivo di I_{B1} ed I_{B2} alla tensione di uscita risulta:

$$\begin{aligned} V_{out} &\approx I_{B2} R_2 - I_{B1} R_C \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \\ &= (I_{B2} - I_{B1}) R_2 = \pm I_{off} R_2 \end{aligned} \quad (1.36)$$

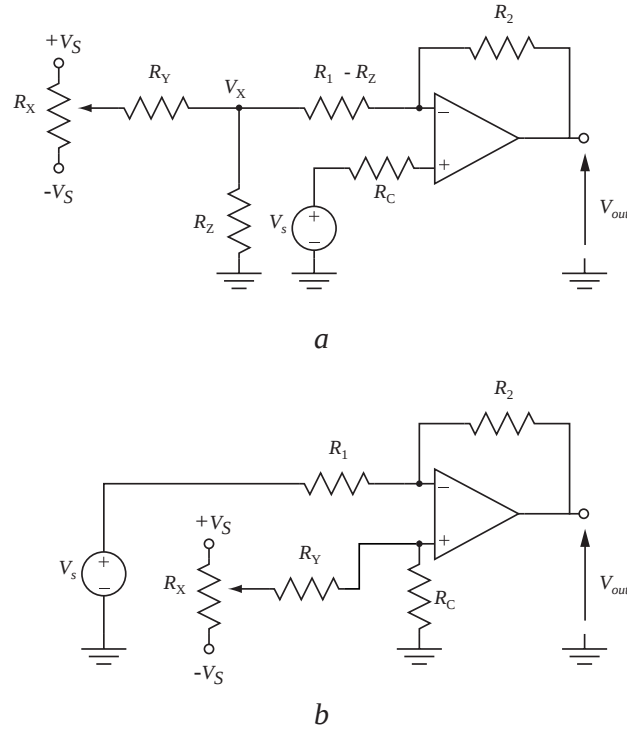


Figura 1.20: AO in configurazione non invertente (a) ed invertente (b) con circuito di compensazione degli effetti di I_{off} , V_{IO} e $\frac{(V_+ + V_-)}{2 CMRR}$.

Per la compensazione dell'effetto della corrente di offset di ingresso I_{off} e dei generatori di tensione V_{IO} e $\frac{(V_+ + V_-)}{2 CMRR}$ è invece necessario sommare alla maglia di ingresso un opportuno segnale in tensione che con il segnale di ingresso V_s nullo porti ad avere V_{out} uguale alla tensione di riposo nominale. Questo deve ovviamente avvenire senza modificare il guadagno per il segnale di ingresso V_s . Molti AO commerciali sono forniti di due appositi terminali ai quali si collegano due dei tre terminali di un potenziometro, mentre il terzo va riferito ad una delle tensioni di alimentazione. In mancanza dei suddetti ingressi, lo stesso effetto può essere ottenuto con i circuiti riportati in fig. 1.20. Anche per i circuiti di fig. 1.20, è facile verificare che, se $R_X, R_Y \gg R_1, R_C$ e $R_1 \gg R_Z$, le resistenze R_X, R_Y ed R_Z non hanno effetto apprezzabile sulle relazioni ricavate nei paragrafi 1.3.1 e 1.3.2, mentre permettono, variando il potenziometro R_X , di variare la tensione dei nodi V_X (circuito a) e V_+ (circuito b) fino ad annullare, per V_s cortocircuitata, la tensione V_{out} .

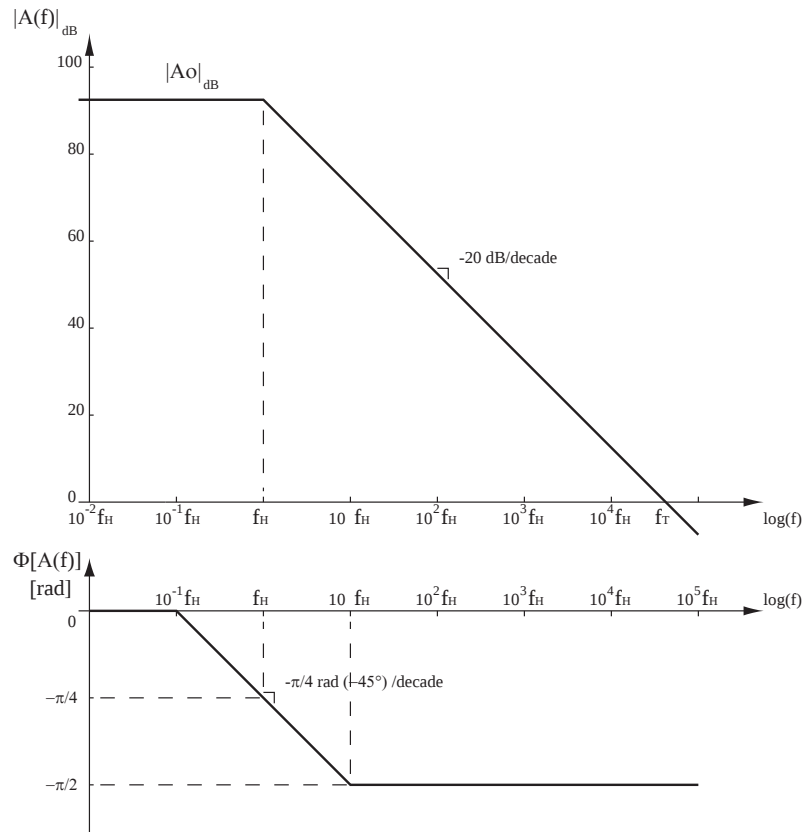


Figura 1.21: Diagrammi asintotici di Bode per una funzione a singolo polo (eq. 1.39)

1.3.4 Effetti della banda finita

Nel par. 1.3 si è accennato al fatto che il guadagno⁵ di un AO reale è una funzione della frequenza di tipo passabasso. A differenza delle non idealità discusse nel paragrafo precedente, il fatto di avere banda finita influisce sulle relazioni ricavate nei paragrafi 1.3.1 e 1.3.2). In questo paragrafo viene prima analizzato il tipo di dipendenza del guadagno ad anello aperto dell'AO dalla frequenza, e quindi vengono discussi gli effetti che la dipendenza dalla frequenza ha sul comportamento dell'AO retroazionato.

Per la maggior parte degli AO il guadagno ad anello aperto è approssimabile con una funzione a singolo polo del tipo

⁵D'ora in poi in questo capitolo, a meno che non sia espressamente indicato, ci si riferirà al guadagno differenziale dell'AO

$$A(f) = \frac{A_o}{1 + j \frac{f}{f_H}} \quad (1.37)$$

dove A_o è il guadagno in continua, già introdotto nel par. 1.3.1, mentre f_H è la *frequenza di taglio a 3 dB*, in corrispondenza della quale il modulo di $A(f)$ si riduce di un fattore $1/\sqrt{2}$. La eq. 1.37 si può equivalentemente scrivere, sfruttando la relazione tra pulsazione e frequenza, come

$$A(\omega) = \frac{A_o}{1 + j \frac{\omega}{\omega_H}} \quad (1.38)$$

dove $\omega_H = 2 \pi f_H$. In figura 1.21 sono riportati i diagrammi asintotici di Bode in modulo e fase per la funzione 1.37. Il diagramma asintotico del modulo approssima il modulo di A_f nel seguente modo:

$$|A(f)| = \frac{A_o}{\sqrt{1 + (\frac{f}{f_H})^2}} \approx \begin{cases} A_o & \text{se } f < f_H \\ \frac{A_o f_H}{f} & \text{se } f \geq f_H \end{cases} \quad (1.39)$$

mentre nel diagramma asintotico della fase l'approssimazione utilizzata è⁶:

$$\Phi[A(f)] = -\tan^{-1}\left(\frac{f}{f_H}\right) \approx \begin{cases} 0 & \text{se } f < 0.1 f_H \\ -\frac{\pi}{4} \left(\log_{10} \frac{f}{f_H} + 1\right) & \text{se } 0.1 f_H \leq f \leq 10 f_H \\ -\frac{\pi}{2} & \text{se } f > 10 f_H \end{cases} \quad (1.40)$$

Dalla eq. 1.39 si ricava che $f \geq f_H$ il prodotto $|A(f)| f$ è una costante di valore $A_o f_H$ (nell'uso comune si dice che il prodotto guadagno banda di un amplificatore a singolo polo è costante). La frequenza f_T per cui $|A(f_T)| = 1$ prende il nome di *frequenza di transizione* o prodotto guadagno banda (f_T è infatti riportata spesso nei data sheet come *GBW*, ovvero *Gain Bandwidth product*), dal momento che risulta $f_T = A_o f_H$. Negli AO commerciali di tipo tradizionale f_T può variare da 1 MHz a 100 MHz.

⁶si ricorda che l'errore massimo commesso è di -3 dB per $f = f_H$ nel caso del modulo, mentre per la fase l'errore commesso è sempre minore di $\pi/30$, ovvero di 6° , con il massimo in corrispondenza di $f = 0.1 f_H$ e di $f = 10 f_H$

Configurazione non invertente

Sostituendo l'eq. 1.37 al posto di A_o nella relazione che esprime il guadagno dell'AO in configurazione non invertente (eq. 1.13) si ottiene:

$$\begin{aligned} A_f(f) &= \frac{1}{\beta} \frac{\beta A(f)}{1 + \beta A(f)} = \frac{1}{\beta} \frac{\frac{\beta A_o}{1+j \frac{f}{f_H}}}{1 + \frac{\beta A_o}{1+j \frac{f}{f_H}}} \\ &= \frac{1}{\beta} \frac{\beta A_o}{1 + \beta A_o} \frac{1}{1 + j \frac{f}{f_H(1+\beta A_o)}} \end{aligned} \quad (1.41)$$

Il guadagno $A_f(f)$ nell'eq. 1.41 è ancora una funzione complessa (quindi da valutare in modulo e fase), a singolo polo, con guadagno in continua dato dall'espressione già ricavata nell'eq. 1.13:

$$A_f(0) = A_{fo} = \frac{1}{\beta} \frac{\beta A_o}{1 + \beta A_o} \approx \frac{1}{\beta}$$

e frequenza di taglio $f_{Hf} = f_H (1 + \beta A_o)^7$. In figura 1.22 sono riportati i diagrammi asintotici di Bode del modulo del guadagno ad anello aperto (eq. 1.37, in nero) e del guadagno $A_f(f)$ ricavato nell'eq. 1.41 (in rosso). E' facile dimostrare che, per $f > f_{Hf}$, i due diagrammi asintotici coincidono (e quindi coincidono anche f_T ed f_{Tf}), infatti:

$$|A_f(f)|_{f > f_{Hf}} \approx \frac{1}{\beta} \frac{\beta A_o}{1 + \beta A_o} \frac{f_H (1 + \beta A_o)}{f} = \frac{A_o f_H}{f} \quad (1.42)$$

E' anche facile verificare, a partire dai due diagrammi asintotici, che per $f > f_H$ il modulo del guadagno di anello $\beta A(f)$ si riduce di 20 dB per decade: in particolare $|\beta A(f_{Hf})| = 1$ (ovvero 0 dB), e $|\beta A(f)|_{f > f_{Hf}} < 1$. La verifica è immediata considerando che:

$$|\beta A(f)|_{dB} = |A(f)|_{dB} - \left| \frac{1}{\beta} \right|_{dB} \quad (1.43)$$

e che quindi la distanza tra il diagramma asintotico di Bode di $|A(f_f)|_{dB}$ ed il guadagno asintotico dell'AO in configurazione non invertente $\left| \frac{1}{\beta} \right|_{dB}$ (fig. 1.22) è proprio $|\beta A(f)|_{dB}$.

⁷L'allargamento della banda a 3 dB del fattore $1 + \beta A_o$ è dovuta alla riduzione del guadagno in continua dell'AO retroazionato, rispetto al guadagno in continua ad anello aperto, dello stesso fattore

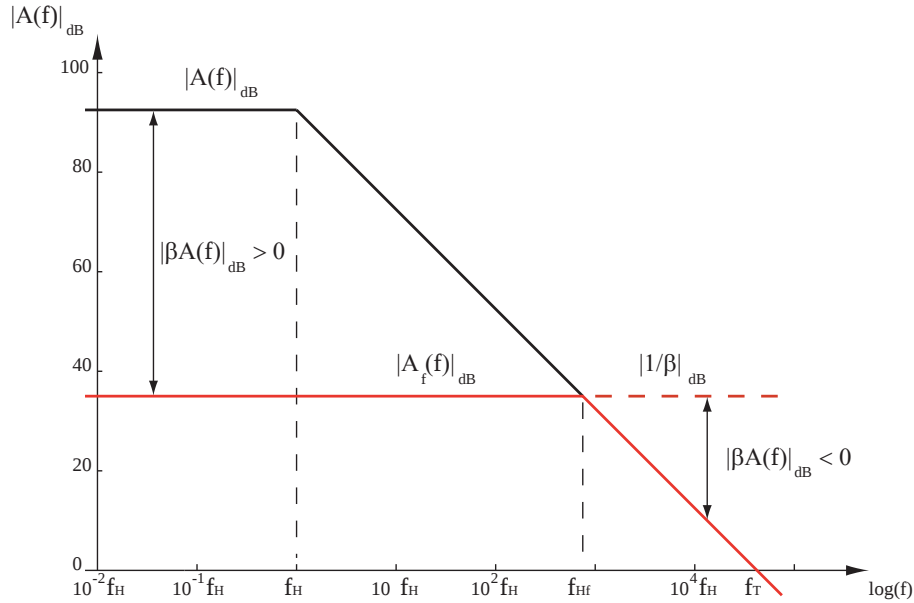


Figura 1.22: Diagramma asintotico di Bode del modulo delle funzioni 1.37 (in nero) e 1.41 (in rosso)

Come conseguenza di questo fatto, le grandezze che dipendono da $A(f)$ e da $\beta A(f)$, come R_{if} ed R_{of} sono anche esse grandezze complesse, ed i risultati ricavati nel par. 1.3.2 sono approssimazioni valide per $f < f_H$. Per $f > f_H$ l'effetto del guadagno di anello su tali grandezze si riduce, fino a diventare trascurabile per $f > f_{Hf}$, quando $|\beta A(f)| < 1$.

Configurazione invertente

Per l'AO in configurazione invertente, procedendo in modo analogo a quanto appena visto si ottiene:

$$A_f(f) = \left(1 - \frac{1}{\beta}\right) \frac{\beta A(f)}{1 + \beta A(f)} = \left(1 - \frac{1}{\beta}\right) \frac{\beta A_o}{1 + \beta A_o} \frac{1}{1 + j \frac{f}{f_H(1 + \beta A_o)}} \quad (1.44)$$

A parte il guadagno in continua, che è quello trovato nell'eq. 1.16, la frequenza di taglio f_{Hf} , a parità di $A(f)$ e β , è la stessa trovata per l'AO in configurazione non invertente⁸. Quindi, come si vede in fig. 1.23, dove è riportato il diagramma asintotico di Bode per la funzione 1.44, in questo caso per

⁸Ovvero, dato $A(f)$, fissando β si fissa la frequenza di taglio f_{Hf} dell'AO, qualunque sia la sua configurazione

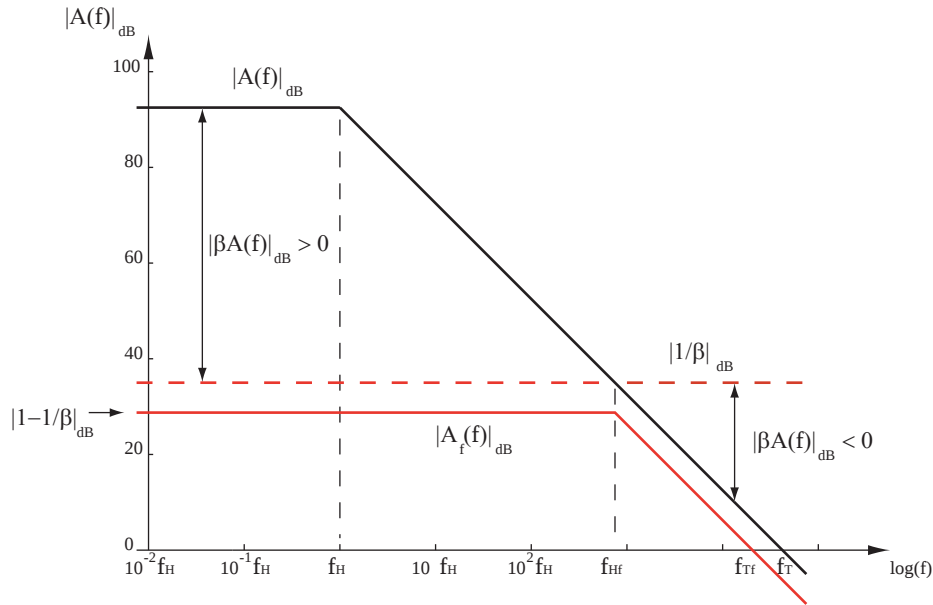


Figura 1.23: Diagramma asintotico di Bode del modulo delle funzioni 1.37 (in nero) e 1.44 (in rosso)

$f > f_{Hf}$ $|A(f)|$ e $|A_f(f)|$ non sono esattamente coincidenti, così come non lo sono f_T ed f_{Tf} (in particolare $f_{Tf} < f_T$). Questo è dovuto ovviamente al fatto che $|1 - 1/\beta| < |1/\beta|$.

Risposta in frequenza di amplificatori a più stadi

Se si pongono in cascata N AO comunque configurati, il guadagno complessivo della cascata si può in generale approssimare con il prodotto dei guadagni dei singoli AO presi singolarmente:

$$A_{fTOT}(f) \approx \prod_{i=1}^N A_{f_i}(f) = \prod_{i=1}^N \frac{A_{of_i}}{1 + j \frac{f}{f_{Hf_i}}} \quad (1.45)$$

La 1.45 si scrive in forma di uguaglianza per gli AO ideali, in cui, essendo R_o (e quindi anche R_{of}) nulla, non si hanno effetti di carico passando da uno stadio della cascata al successivo, e in generale si scrive in forma di uguaglianza anche quando $R_{of_i} \ll R_{if_{i+1}}$ per $i = 1, N - 1$. In queste ipotesi la frequenza di taglio $f_H f_{TOT}$ della cascata si calcola risolvendo l'equazione:

$$|A_{fTOT}(f_{HfTOT})| = \left| \prod_{i=1}^N A_{of_i} \right| \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (1.46)$$

Il calcolo di $f_{Hf_{TOT}}$ diventa immediato se gli N stadi amplificatori sono identici. In questo caso infatti

$$A_{f_{TOT}}(f) = \left(\frac{A_{of}}{1 + j \frac{f}{f_{Hf}}} \right)^N \quad (1.47)$$

e quindi, applicando la definizione di frequenza di taglio, si ottiene:

$$f_{Hf_{TOT}} = f_{Hf} \sqrt{2^{\frac{1}{N}} - 1} \quad (1.48)$$

Con riferimento all'eq. 1.48, $f_{Hf_{TOT}} < f_{Hf}$ per $N \geq 2$, e nel caso generale $f_{Hf_{TOT}}$ è comunque minore della più piccola tra le f_{Hf_i} .

Nota 1: In questo paragrafo si è considerato il guadagno ad anello aperto dell'AO una funzione a singolo polo. In realtà il guadagno ad anello aperto di un AO è in generale una funzione a polo dominante che ha in $f_1 = f_H$ il polo a frequenza più bassa, ma che presenta altri poli a frequenza $f_i \gg f_H$, con $i=2..k$, per le quali $|A(f_i)| \leq 1$ (tipicamente si ha almeno un polo per ciascuno stadio che compone l'AO, ed uno o più poli legati ai limiti fisici dei transistor con cui l'AO è realizzato; spesso f_2 è tale che $|A(f_2)| = 1$, e dunque $f_2 = f_T$, mentre $f_3 \geq 10 f_2$). La caratteristica di essere una funzione a polo dominante è frutto di una ben precisa scelta progettuale. Infatti un amplificatore retroazionato è stabile se alla frequenza per cui $|A_{OL}\beta| = 1$ si ha $\Phi(A_{OL}\beta) > -\pi$, anche se in pratica si richiede che un amplificatore sia sufficientemente lontano dalla condizione di instabilità, ovvero che alla frequenza per cui $|A_{OL}\beta| = 1$ si abbia $\Phi(A_{OL}\beta) \geq -\pi + m_\varphi > -\pi$, dove $m_\varphi > 0$ prende il nome di *margin di fase*. Alla luce di quanto discusso nel corso del paragrafo, un AO a polo dominante con $f_2 = f_T$ ed $f_3 \geq 10 f_2$, per qualunque retroazione *resistiva* β risulta quindi stabile, con un *margin di fase* m_φ di almeno $\frac{\pi}{4}$ (condizione che si raggiunge per $f = f_T$ con $\beta = 1$).

In realtà se l'uscita dell'AO è caricata capacitivamente, dato che R_o non è nulla, si ha che la capacità di carico ed R_o formano un filtro passabasso che introduce un ulteriore ritardo di fase rispetto a quello introdotto dall'AO. Per apprezzare questo aspetto bisogna tener conto dell'effetto del carico sul guadagno ad anello aperto dell'AO. Con riferimento alla figura 1.24.a, in cui è riportata la sezione di uscita della rete a due porte con cui si modella l'AO (fig. 1.1.b), ed in cui R_β e C_L rappresentano rispettivamente il carico resistivo dato dalla rete di retroazione

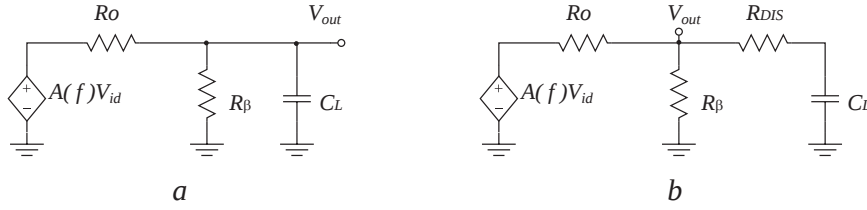


Figura 1.24: Sezione di uscita del modello dell'AO (fig. 1.1.b): con carico capacitivo (C_L) e carico resistivo dato dalla rete di retroazione (R_β): senza (a) e con resistenza di disaccoppiamento R_{DIS} (b).

ed il carico capacitivo ipotizzato, si ha infatti:

$$\begin{aligned}
 V_{out}(f) &= A(f)V_{id} \frac{\frac{R_\beta}{1+j\omega C_L R_\beta}}{R_o + \frac{R_\beta}{1+j\omega C_L R_\beta}} \\
 &= A(f)V_{id} \frac{R_\beta}{R_o + R_\beta} \frac{1}{1 + j\omega C_L R_o \parallel R_\beta}
 \end{aligned} \tag{1.49}$$

Questo problema è più grave per gli AO *rail to rail*, che per la struttura dello stadio di uscita sono gli AO con R_o di valore più elevato, e quindi con limitata possibilità di pilotare carichi capacitivi. Con questo tipo di AO tipicamente si disaccoppia il carico capacitivo con una resistenza dell'ordine delle decine di Ohm, il cui effetto è di introdurre uno zero nel guadagno differenziale dell'AO valutato tenendo conto degli effetti di carico, e quindi di recuperare margine di fase. Facendo riferimento alla figura 1.24.b, in cui è riportata la resistenza di disaccoppiamento R_{DIS} si ha infatti:

$$\begin{aligned}
 V_{out}(f) &= A(f)V_{id} \frac{R_\beta \parallel (R_{DIS} + \frac{1}{j\omega C_L})}{R_o + R_\beta \parallel (R_{DIS} + \frac{1}{j\omega C_L})} \\
 &= A(f)V_{id} \frac{R_\beta (j\omega C_L R_{DIS} + 1)}{R_o (1 + j\omega C_L (R_\beta + R_{DIS})) + R_\beta (j\omega C_L R_{DIS} + 1)} \\
 &= A(f)V_{id} \frac{R_\beta}{R_o + R_\beta} \frac{1 + j\omega C_L R_{DIS}}{1 + j\omega C_L \frac{R_o R_\beta + R_o R_{DIS} + R_\beta R_{DIS}}{R_o + R_\beta}} \\
 &\approx A(f)V_{id} \frac{R_\beta}{R_o + R_\beta} \frac{1 + j\omega C_L R_{DIS}}{1 + j\omega C_L (R_o + R_{DIS})}
 \end{aligned} \tag{1.50}$$

Nota 2: Finora si è supposto che la rete β fosse puramente resistiva; esistono tuttavia varie applicazioni dell'AO in cui nella rete di reazione sono presenti anche elementi reattivi, in particolare condensatori. In questo caso nelle configurazioni non invertente ed invertente (fig. 1.4 e fig. 1.5) le resistenze R_1 ed R_2 sono sostituite, in generale, da due impedenze Z_1 e Z_2 , e β diviene funzione della frequenza:

$$\beta(f) = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \quad (1.51)$$

Il modo di affrontare lo studio dei circuiti in cui la rete di retroazione presenta elementi reattivi non varia rispetto a quanto fin qui visto, ed in particolare continua ad essere valido, in generale, il principio delle masse virtuali (questo aspetto verrà discusso nel par. 2.6). Naturalmente le considerazioni sulla stabilità dei circuiti basati su AO, riportate nella precedente nota, devono essere riformulate tenendo conto della dipendenza di β dalla frequenza.

1.3.5 Slew rate

In un AO reale la velocità con cui può variare la tensione di uscita è necessariamente limitata, e non solo per i limiti sulla banda passante di cui si è discusso nel precedente paragrafo. Infatti, se si considera una qualunque configurazione dell'AO e si applica un segnale di ingresso a gradino, ciò che si osserva in uscita non è la risposta di un sistema a singolo polo⁹, di tipo esponenziale, ma piuttosto, in generale, una rampa a pendenza costante. Questo comportamento si spiega, in termini di carica/scarica di una capacità, se la corrente che determina la carica o la scarica è costante. Con riferimento alla fig. 1.8, ad esempio, un comportamento di questo tipo si spiega considerando che, qualunque sia la configurazione dell'AO, la massima corrente con cui si può caricare la capacità C è $I_X = I_P$. In altre parole, il generatore di corrente controllato in tensione con cui si può schematizzare il circuito che genera I_X satura una volta raggiunti i valori di corrente $\pm I_P$, inducendo un comportamento non lineare dell'amplificatore.

Il parametro dell'AO che tiene conto di questi fenomeni prende il nome di Slew Rate (SR), ed è definito come il valore massimo della velocità di variazione della tensione V_{out} nel funzionamento per ampi segnali¹⁰. Valori tipici per lo SR,

⁹E neppure di un sistema di ordine superiore al primo

¹⁰Si parla di funzionamento per ampi segnali quando la tensione di uscita varia in un intervallo di valori prossimo a quello massimo, ovvero, nel caso di AO *rail to rail*, $(+V_S, -V_S)$. E' chiaro che gli effetti di saturazione della corrente di carica/scarica delle capacità interne all'AO non si hanno, in generale, in regime di piccoli segnali, in cui valgono le approssimazioni lineari.

per AO di tipo standard, sono compresi tra $0.1 \text{ V}/\mu\text{s}$ e $10 \text{ V}/\mu\text{s}$ (esistono però AO con una struttura interna diversa da quella riportata in fig. 1.8, che sono indicati come *AO a retroazione di corrente*, che possono avere SR dell'ordine dei $1000 \text{ V}/\mu\text{s}$).

$$SR = \left| \frac{d V_{out}(t)}{dt} \right|_{MAX} \quad (1.52)$$

Lo SR fissa un vincolo tra frequenza ed ampiezza massime del segnale di uscita per non avere distorsione. Questo concetto è facilmente spiegabile se si suppone di avere in uscita un segnale sinusoidale, ovvero $V_{out} = V_O \sin(2\pi f_o t)$. In questo caso

$$\left| \frac{d V_{out}(t)}{dt} \right|_{MAX} = |V_O \cos(2\pi f_o t)|_{MAX} = V_O 2\pi f_o \quad (1.53)$$

Per non avere distorsione, in queste ipotesi, deve essere

$$SR \geq V_O 2\pi f_o \quad (1.54)$$

e quindi, fissata la frequenza f_o , si ha un limite superiore sul valore massimo dell'ampiezza $V_{O MAX}$; analogamente, fissata V_O , si ha un limite superiore per la frequenza $f_{o MAX}$. In quest'ultimo caso, se V_O è uguale alla tensione di fondo scala V_{FS} (ovvero al valore massimo che può assumere la tensione di uscita dell'AO, $+V_S$ nel caso di AO rail to rail), il limite superiore per la frequenza $f_{o MAX}$ prende il nome di *banda a piena potenza* dell'AO (B_{PP}):

$$B_{PP} = \frac{SR}{2\pi V_{FS}} \quad (1.55)$$

Normalmente lo SR riportato sui data sheet è valutato per l'AO configurato come inseguitore di tensione, e quindi il limite sull'ampiezza della tensione di uscita dato dalla 1.54 per f_o fissata si traduce direttamente nello stesso vincolo per l'ampiezza massima del segnale di ingresso $V_{I MAX}$. Se l'AO non è configurato come inseguitore di tensione, invece,

$$V_{I MAX} = \frac{V_{O MAX}}{|A_f(f)|} \quad (1.56)$$

1.3.6 Approfondimenti

Impedenza di ingresso

Come accennato nel paragrafo 1.3.2 una descrizione accurata della resistenza offerta dagli ingressi dell'AO richiede un modello più complesso di quello finora

introdotto. In particolare, la situazione a cui fanno riferimento i data sheet è descritta in fig. 1.25, dove tra i terminali invertente e non invertente si ha una resistenza R_d , mentre tra ciascuno dei due terminali e massa si ha una resistenza R_c . In figura sono anche riportati in termine di tensione di modo comune V_{ic} e tensione differenziale V_{id} , le tensioni V_+ e V_- . R_d è tipicamente compresa, in funzione della tecnologia con cui è realizzato l'AO, tra $10^7 \Omega$ e $10^{12} \Omega$, mentre in genere $R_c \gg R_d$.

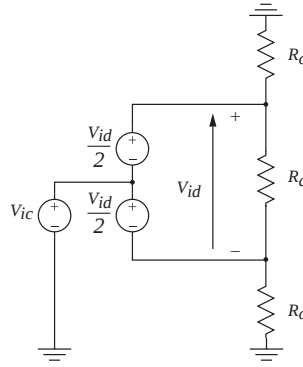


Figura 1.25: Circuito equivalente di ingresso dell'AO con incluse le resistenze di modo comune

Con riferimento alla fig. 1.25, la *resistenza di ingresso differenziale* R_{id} , introdotta nel paragrafo 1.3.2, e definita come la resistenza tra i due terminali di ingresso quando entrambi sono sconnessi da massa, è data da (tenendo conto che $R_c \gg R_d$):

$$R_{id} = R_d \parallel 2 R_c \approx R_d \quad (1.57)$$

La *resistenza di ingresso* R_i è invece definita come la resistenza vista tra uno dei due ingressi e massa quando l'altro ingresso è cortocircuitato, e vale:

$$R_i = R_d \parallel R_c \approx R_d \quad (1.58)$$

Nei data sheet è anche definita la *resistenza di ingresso di modo comune* R_{ic} che è la resistenza vista dal generatore di modo comune V_{ic} e massa per V_{id} nullo:

$$R_{ic} = R_c \parallel R_c = \frac{R_c}{2} \quad (1.59)$$

Il modello di figura 1.25 può essere complicato aggiungendo una capacità C_d in parallelo ad R_d , ed una capacità C_c in parallelo ad ognuna delle due R_c . C_c e C_d sono in genere dell'ordine dei pF. I data sheet riportano in genere il parametro

C_i (*capacità di ingresso*), definito come la capacità vista tra uno dei terminali di ingresso e massa quando l'altro terminale è cortocircuitato ($C_i = C_d \parallel C_c$), ed il parametro C_{ic} (*capacità di ingresso di modo comune*), che, analogamente a R_{ic} , risulta definito come $C_{ic} = C_c \parallel C_c = 2 C_c$. Sia C_i che C_{ic} sono dell'ordine dei pF.

La capacità di ingresso C_i va considerata se si pilota l'AO con una sorgente ad alta impedenza e a frequenza elevata (perchè in tal caso si può avere un effetto di carico sulla sorgente stessa). Inoltre la capacità di ingresso introduce al crescere della frequenza un ritardo di fase addizionale nel percorso di retroazione che, specialmente per valori elevati della resistenza di retroazione, può ridurre significativamente il margine di fase dell'amplificatore.

Capitolo 2

AO CON RETROAZIONE NEGATIVA: APPLICAZIONI

2.1 Introduzione

L'aggettivo 'operazionale' indica l'utilizzo principale per cui questo dispositivo è stato impiegato: effettuare operazioni aritmetiche sui segnali in ingresso. In questo capitolo saranno illustrati i circuiti per realizzare le operazioni di somma, sottrazione, integrale, derivata, modulo, logaritmo, antilogaritmo (questi ultimi tre casi richiedono l'utilizzo di una rete di retroazione non lineare). Nell'ultimo paragrafo verranno anche descritti alcuni circuiti di uso frequente in cui gli AO sono utilizzati per realizzare generatori di corrente. A meno che non venga esplicitamente indicato, i circuiti presentati in questo capitolo verranno analizzati supponendo gli AO ideali. L'effetto delle non idealità degli AO può infatti essere facilmente studiato a partire da quanto discusso nel cap. 1.

2.2 Sommatore

Un circuito sommatore è un circuito la cui uscita $V_{out}(t)$, dati n segnali di ingresso $V_i(t)$ con $i = 1..n$, risulta una combinazione lineare di questi ultimi con coefficienti reali tutti dello stesso segno. Limitandosi al caso a due ingressi, un sommatore realizza dunque la funzione:

$$V_{out}(t) = \alpha_1 V_1(t) + \alpha_2 V_2(t) \quad \text{con } \alpha_1 \text{ e } \alpha_2 \in \mathbf{R}^+ \text{ o } \in \mathbf{R}^- \quad (2.1)$$

In fig. 2.1, per il circuito a) si ha, applicando il principio di sovrapposizione degli effetti ed il principio delle masse virtuali:

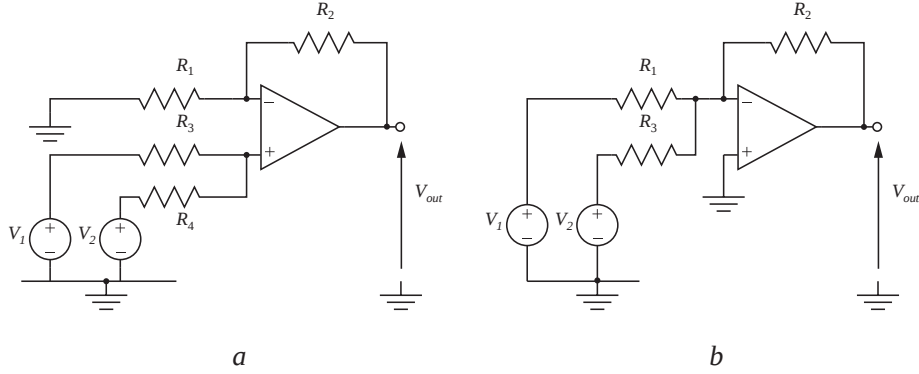


Figura 2.1: Circuito che realizza la funzione data dall'eq. 2.1: (a) $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}^+$; (b) $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}^-$

$$V_{out}(t) = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \left(V_1(t) \frac{R_4}{R_3 + R_4} + V_2(t) \frac{R_3}{R_3 + R_4}\right) \quad (2.2)$$

che coincide con la 2.1 per $\alpha_1 = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \frac{R_4}{R_3 + R_4}$ ed $\alpha_2 = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \frac{R_3}{R_3 + R_4}$. Analogamente, per il circuito b) si ha:

$$V_{out}(t) = -\frac{R_2}{R_1} V_1(t) - \frac{R_2}{R_3} V_2(t) \quad (2.3)$$

che coincide con la 2.1 per $\alpha_1 = -\frac{R_2}{R_1}$ ed $\alpha_2 = -\frac{R_2}{R_3}$.

2.3 Sottrattore

Dalle due strutture del circuito sommatore si può ottenere direttamente (fig. 2.2) un possibile circuito che realizzi la funzione:

$$V_{out}(t) = \alpha_1 V_1(t) - \alpha_2 V_2(t) \quad \text{con } \alpha_1 \text{ e } \alpha_2 \in \mathbf{R}^+ \quad (2.4)$$

In questo caso $\alpha_1 = \frac{R_4}{R_3 + R_4} \frac{R_1 + R_2}{R_1}$ ed $\alpha_2 = \frac{R_2}{R_1}$. Ovviamente, essendo $\frac{R_4}{R_3 + R_4} \leq 1$, il circuito può eseguire l'operazione descritta dall'eq. 2.4 se $\alpha_1 \leq \alpha_2 + 1$.

Se $R_2 = R_4$ e $R_1 = R_3$ la funzione realizzata dal circuito in fig. 2.2 diviene:

$$V_{out}(t) = \frac{R_2}{R_1} (V_1(t) - V_2(t)) \quad (2.5)$$

ovvero il circuito in fig. 2.2 amplifica la *differenza* dei segnali $V_1(t)$ e $V_2(t)$. Lo svantaggio di questa configurazione è tuttavia quello di presentare ai due generatori di tensione V_1 e V_2 una resistenza di ingresso diversa ($R_{in1} = R_3 + R_4 =$

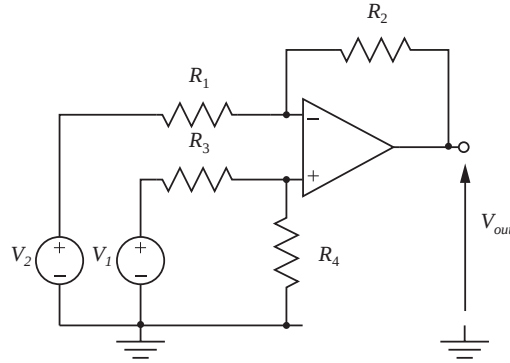


Figura 2.2: Circuito che realizza la funzione 2.4

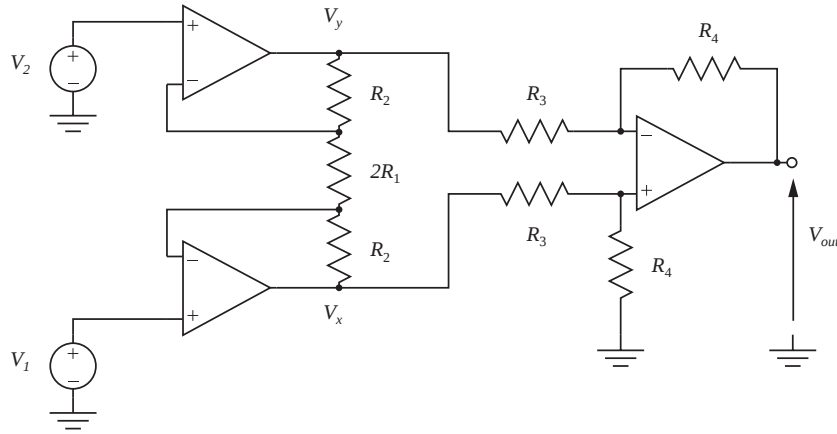


Figura 2.3: Amplificatore per strumentazione

$R_1 + R_2$, $R_{in2} = R_1$ per $V_1 = 0V$, mentre R_{in2} è variabile in funzione di V_1 per $V_1 \neq 0V$) e in generale non elevata. Questo fatto non ha conseguenze se i generatori di tensione V_1 e V_2 sono ideali, mentre influisce sulla accuratezza del risultato se V_1 e V_2 sono generatori reali con resistenze interne non nulle. Un circuito che risolve questo problema è l'amplificatore per strumentazione, di cui in fig. 2.3 è riportato lo schema di principio.

Nel circuito di fig. 2.3 la tensione ai capi della resistenza $2R_1$ è, per il principio delle masse virtuali, $V_2(t) - V_1(t)$. La corrente che scorre sulla resistenza $2R_1$ è

quindi $i = \frac{V_2(t) - V_1(t)}{2R_1}$, per cui, essendo $I_- = 0A$, si ha:

$$\begin{aligned} V_y(t) - V_x(t) &= i(2R_1 + 2R_2) = \frac{V_2(t) - V_1(t)}{2R_1}(2R_1 + 2R_2) \\ &= (V_2(t) - V_1(t))(1 + \frac{R_2}{R_1}) \end{aligned} \quad (2.6)$$

L'espressione della tensione di uscita del circuito in fig. 2.3 si ottiene quindi combinando le equazioni 2.5 e 2.5:

$$V_{out}(t) = \frac{R_3}{R_4}(1 + \frac{R_2}{R_1})(V_1(t) - V_2(t)) \quad (2.7)$$

Concludendo, il circuito in fig. 2.3 è ancora un amplificatore differenziale, ma con $R_{in} = \infty$ per entrambi gli ingressi.

2.4 Derivatore ed Integratore

In questo paragrafo vengono analizzati due circuiti, il *derivatore* e l'*integratore*, per i quali la rete di retroazione contiene un condensatore, e che quindi presentano, diversamente da quanto visto finora, una rete β dipendente dalla frequenza. Oltre alla trattazione effettuata considerando ideali gli AO, per l'integratore verranno analizzati gli effetti dell'utilizzo di un'AO reale con guadagno e banda finiti, con resistenza di uscita non nulla, e con tensione di offset e corrente di polarizzazione non nulla. La particolare attenzione dedicata all'integratore deriva sia dal fatto che questo circuito si presta particolarmente a mettere in luce gli effetti delle non idealità dell'AO sul comportamento dei circuiti con esso realizzati, sia dal fatto che l'integratore è un elemento circuitale utilizzato in svariati circuiti più complessi, come ad esempio convertitori analogico/digitali, generatori di forme d'onda, filtri attivi, e di cui è utile pertanto conoscere nel dettaglio il funzionamento.

2.4.1 Derivatore con AO ideale

Nel circuito di fig. 2.4 l'AO è retroazionato negativamente tramite la resistenza R , quindi vale il principio delle masse virtuali. Eseguendo il bilancio delle correnti al morsetto invertente dell'AO si ha:

$$I_s(t) = C \frac{dV_s(t)}{dt} = -\frac{V_{out}(t)}{R} \quad (2.8)$$

da cui si ricava:

$$V_{out}(t) = -CR \frac{dV_s(t)}{dt} \quad (2.9)$$

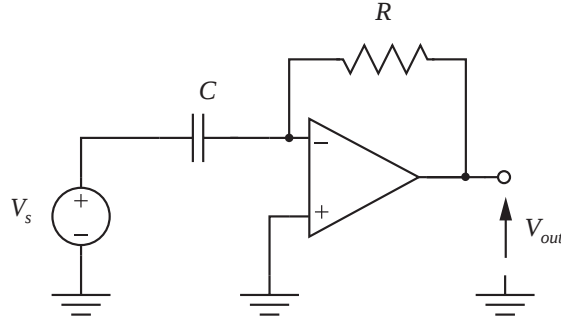


Figura 2.4: Circuito derivatore con AO.

La eq. 2.9 esprime il legame esistente tra V_{out} e V_s nel dominio del tempo. Nel dominio della frequenza, essendo l'AO ideale ed essendo

$$\beta = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega CR} \quad (2.10)$$

il guadagno del circuito in fig. 2.4 si può esprimere come

$$\frac{V_{out}}{V_s} = 1 - \frac{1}{\beta} = -j\omega CR = -j2\pi fCR \quad (2.11)$$

La 2.11 è una funzione di ω con uno zero nell'origine, ed è quindi l'analogia dell'eq. 2.9 nel dominio della frequenza. In fig. 2.5 è riportato in rosso $\left|1 - \frac{1}{\beta}\right|$ (eq. 2.11), ed a linea tratteggiata nera $\left|\frac{1}{\beta}\right|$ (ottenibile dall'eq. 2.10).

Il circuito di fig. 2.4 non è di uso frequente per due ragioni. La prima ragione è che, essendo un filtro passa alto, si comporta da amplificatore di rumore in alta frequenza. La seconda è che la rete di retroazione β si comporta da filtro passa basso, e di conseguenza riduce il margine di fase dell'amplificatore (vedi Nota 1 - par. 1.3.4) che pertanto può risultare facilmente instabile.

2.4.2 Integratore con AO ideale

Si consideri il circuito in fig. 2.6, si supponga l'AO ideale, e si assuma che all'istante di tempo $t = t_0$ la tensione $-V_S < V_{out}(t_0) < +V_S$ (ovvero che l'uscita non sia saturata). In queste condizioni vale il principio delle masse virtuali, ed il generatore V_s eroga quindi la corrente

$$I_s = \frac{V_s - V_-}{R} = \frac{V_s}{R} \quad (2.12)$$

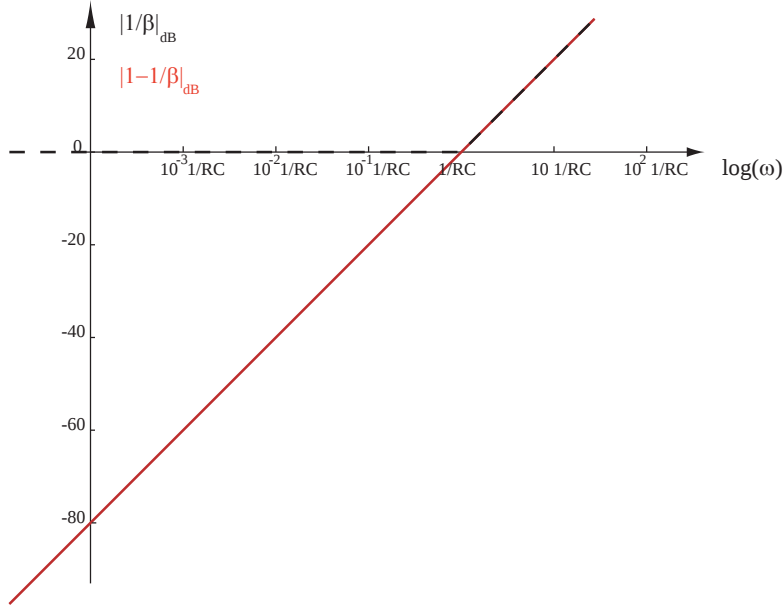


Figura 2.5: Modulo delle grandezze $1 - \frac{1}{\beta}$ (linea continua rossa) e $\frac{1}{\beta}$ (linea tratteggiata nera), riferite al circuito di fig. 2.4.

che, per l'idealità dell'AO, coincide con la corrente I_c . La tensione V_c varia in accordo con quanto stabilito dalla relazione costitutiva del condensatore scritta in forma differenziale, ovvero:

$$I_s(t) = \frac{V_s(t)}{R} = C \frac{dV_c(t)}{dt} \quad (2.13)$$

da cui

$$\int_{V_c(t_0)}^{V_c(t_0+t)} dV_c(\tau) = V_c(t_0+t) - V_c(t_0) = \frac{1}{CR} \int_{t_0}^{t_0+t} V_s(\tau) d\tau \quad (2.14)$$

Finché l'AO non satura, continuando a valere il principio delle masse virtuali, $V_{out} = -V_c$, quindi la eq. 2.14 si può riscrivere come

$$-V_{out}(t_0+t) + V_{out}(t_0) = \frac{1}{CR} \int_{t_0}^{t_0+t} V_s(\tau) d\tau$$

e quindi

$$V_{out}(t_0+t) = -\frac{1}{CR} \int_{t_0}^{t_0+t} V_s(\tau) d\tau + V_{out}(t_0) \quad (2.15)$$

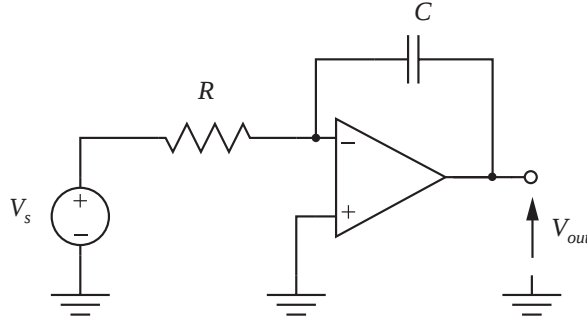


Figura 2.6: Circuito integratore con AO.

Si fa notare come la relazione 2.15 valga anche per V_s costante; in questo caso

$$V_{out}(t_0 + t) = -\frac{V_s}{CR}t + V_{out}(t_0) \quad (2.16)$$

Analogamente a quanto visto per il derivatore, nel dominio della frequenza, essendo l'AO ideale ed essendo in questo caso

$$\beta = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega CR}{1 + j\omega CR} \quad (2.17)$$

il guadagno del circuito si può esprimere, alla luce di quanto visto nel cap. 1, come

$$\frac{V_{out}}{V_s} = 1 - \frac{1}{\beta} = -\frac{1}{j\omega CR} = -\frac{1}{j2\pi fCR} \quad (2.18)$$

La 2.18 è una funzione di ω con un polo nell'origine, ed è quindi l'analogo dell'eq. 2.15 nel dominio della frequenza. In fig. 2.7 è riportato in rosso $\left|1 - \frac{1}{\beta}\right|$ (eq. 2.18), ed a linea tratteggiata nera $\left|\frac{1}{\beta}\right|$ (ottenibile dall'eq. 2.17).

2.4.3 Integratore: effetto del guadagno e della banda finiti dell'AO

Si consideri adesso di rimuovere l'ipotesi di idealità dell'AO per quanto riguarda il guadagno, assumendo valida l'eq 1.38, di seguito riportata per comodità:

$$A(\omega) = \frac{A_o}{1 + j\frac{\omega}{\omega_H}}$$

Si consideri inoltre, con riferimento alla figura 2.8, $\omega_T = 2\pi f_T > \frac{1}{RC}$ (condizione necessaria al corretto funzionamento dell'integratore, come risulterà chiaro dalla

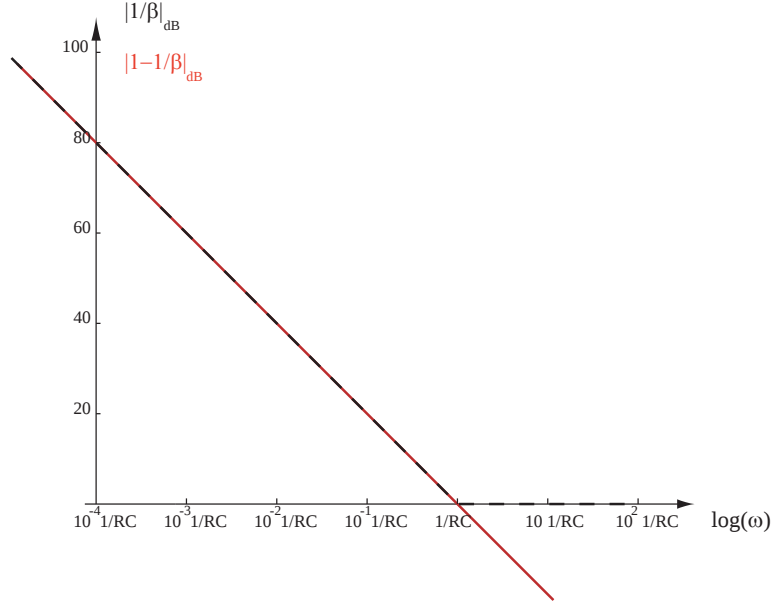


Figura 2.7: Modulo delle grandezze $1 - \frac{1}{\beta}$ (linea continua rossa) e $\frac{1}{\beta}$ (linea tratteggiata nera), riferite al circuito di fig. 2.6.

discussione seguente), e $\omega_H < \frac{1}{RC}$ (condizione non necessaria al corretto funzionamento dell'integratore ma che non limita la generalità della trattazione).

Ricordando l'espressione generale del guadagno di un AO in configurazione invertente data dalla 1.44, qui riportata per comodità:

$$A_f(f) = (\beta - 1) \frac{A(\omega)}{1 + \beta A(\omega)}$$

e considerando che:

- per quanto riguarda il termine $\beta - 1$ si ha

$$|\beta - 1| = \left| -\frac{1}{1 + j\omega RC} \right| \approx \begin{cases} 1 & \text{se } \omega < \frac{1}{RC} \\ \frac{1}{\omega RC} & \text{se } \omega > \frac{1}{RC} \end{cases}$$

- per quanto riguarda il guadagno di anello si ha $|\beta A(\omega)| > 1$ per $\frac{1}{RC A_0} < \omega < \omega_T$ (si veda la fig. 2.8, in cui è evidenziato in giallo la zona in cui $|\beta A(\omega)|_{dB} = |A(\omega)|_{dB} - \left| \frac{1}{\beta} \right|_{dB} \geq 0$), mentre $|\beta A(\omega)| < 1$ per $\omega < \frac{1}{RC A_0}$ e per $\omega > \omega_T$

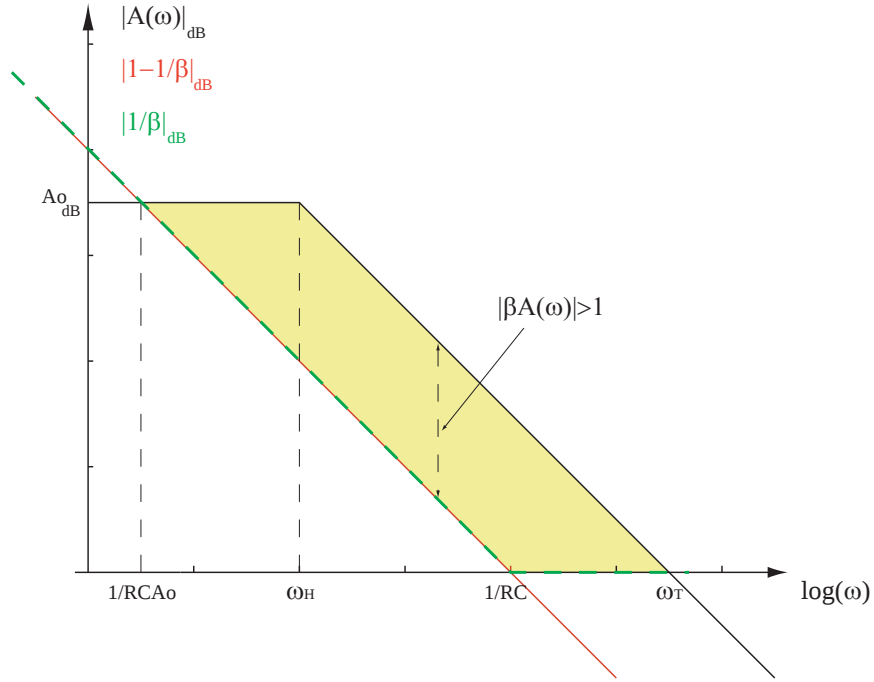


Figura 2.8: Modulo di $1 - \frac{1}{\beta}$ (linea continua rossa), di $\frac{1}{\beta}$ (linea tratteggiata verde) e del guadagno ad anello aperto $A(\omega)$ dell'AO (linea continua nera), riferite al circuito di fig. 2.6, per AO con comportamento in frequenza a singolo polo, $\omega_T > \frac{1}{RC}$, e $\omega_H < \frac{1}{RC}$. E' evidenziata in giallo la zona in cui $|\beta A(\omega)| > 1$.

- per il guadagno ad anello aperto vale la eq. 1.39, qui riportata per comodità

$$|A(\omega)| = \frac{Ao}{\sqrt{1 + (\frac{\omega}{\omega_H})^2}} \approx \begin{cases} Ao & \text{se } \omega < \omega_H \\ \frac{Ao \omega_H}{\omega} & \text{se } \omega > \omega_H \end{cases}$$

è a questo punto possibile ricavare l'espressione del diagramma asintotico di Bode

del modulo del guadagno dell'integratore:

$$|A_f(f)| = |\beta - 1| \left| \frac{A(\omega)}{1 + \beta A(\omega)} \right|$$

$$\approx \begin{cases} |\beta - 1| |A(\omega)| \approx A_0 & \text{se } \omega < \frac{1}{RC A_0} \\ |\beta - 1| \frac{|A(\omega)|}{|\beta A(\omega)|} = \frac{|\beta - 1|}{|\beta|} \approx \frac{1}{\omega RC} & \text{se } \frac{1}{RC A_0} < \omega < \omega_T \\ |\beta - 1| |A(\omega)| \approx \frac{1}{\omega RC} \frac{A_0 \omega_H}{\omega} & \text{se } \omega_T < \omega \end{cases} \quad (2.19)$$

L'eq. 2.19 è sintetizzata nella curva azzurra del grafico in fig. 2.9. Come ulteriore commento ai risultati ottenuti, sia in bassa frequenza che in alta frequenza il modulo del guadagno di anello $\beta A(\omega)$ diviene < 1 , vanificando l'effetto della retroazione negativa: in particolare in bassa frequenza l'integratore reale non può avere un guadagno superiore a quello dell'AO, e questo giustifica anche intuitivamente la nascita del polo in $\omega = 1/RC A_0$; la presenza del secondo polo in $\omega = \omega_T$ è invece dovuta al fatto che a partire da questa pulsazione il guadagno del circuito non è più indipendente dal guadagno ad anello aperto ma è dato dal prodotto dei due contributi $\beta - 1$ e $A(\omega)$. In sintesi, il circuito di fig. 2.6, se l'AO ha il guadagno ad anello aperto in eq. 1.38, si comporta da integratore solo per $\frac{1}{RC A_0} < \omega < \omega_T$.

2.4.4 Integratore: effetto della resistenza di uscita non nulla dell'AO

L'effetto della R_o non nulla dell'AO si spiega anche intuitivamente con le seguenti considerazioni:

- per $\omega > \omega_T$ il guadagno differenziale dell'AO diventa in modulo < 1 e tende ad annullarsi al crescere di ω ; questo implica che per $\omega \gg \omega_T$ l'ingresso invertente dell'AO nel circuito di fig. 2.6 cessa di essere vincolato all'ingresso non invertente (il generatore controllato con cui si modella la porta di uscita dell'AO si può infatti considerare cortocircuitato), ed il suo potenziale dipende unicamente dal generatore V_s ;
- al crescere di ω il modulo dell'impedenza offerta dal condensatore C in fig. 2.6 tende ad annullarsi.

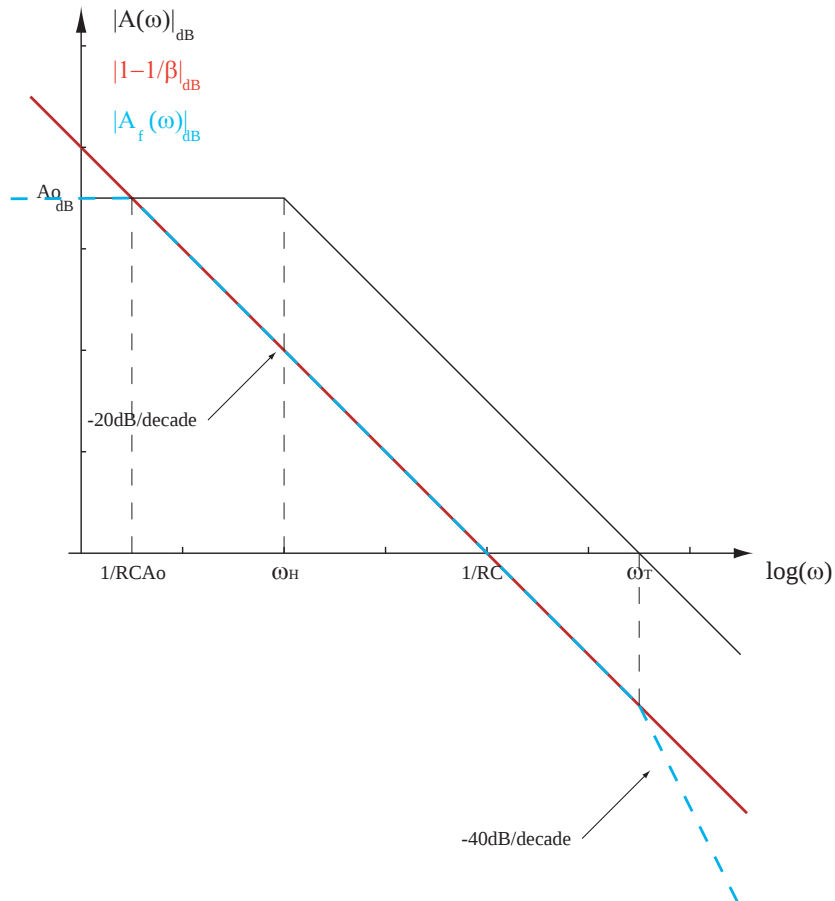


Figura 2.9: Modulo di $1 - \frac{1}{\beta}$ (linea continua rossa), del guadagno ad anello aperto $A(\omega)$ dell'AO (linea continua nera) e di $A_f(\omega)$ (linea tratteggiata azzurra), riferite al circuito di fig. 2.6, per AO con comportamento in frequenza dato dalla eq. 1.39.

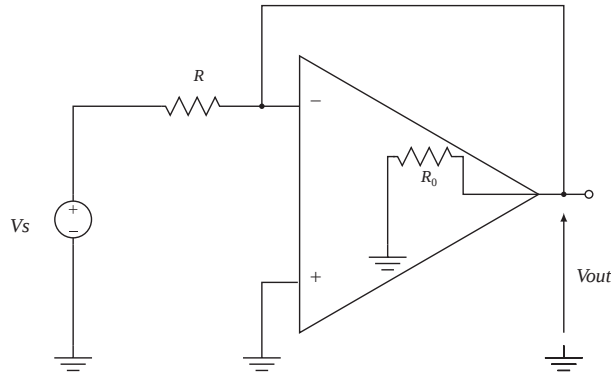


Figura 2.10: Circuito semplificato per analizzare il comportamento dell'integratore di fig. 2.6 per $\omega \gg \omega_T$

In sintesi, al crescere di ω (in generale per $\omega \gg \omega_T$) il circuito di fig. 2.6 'tende' al circuito di 2.10, il cui guadagno dipende unicamente da R e da R_o , ed è quindi indipendente da ω :

$$\frac{V_{out}}{V_s} = \frac{R_o}{R + R_o} \quad (2.20)$$

Il risultato dato dalla eq. 2.20 implica che il comportamento di $|A_f(\omega)|$ per $\omega > \omega_T$ non sia indefinitamente quello riportato in fig. 2.9, ma che, al crescere di ω , si abbia la nascita di una coppia di zeri che rende $|A_f(\omega)|$ indipendente da ω .

2.4.5 Integratore: effetto di tensione di offset e correnti di polarizzazione dell'AO

In questo paragrafo si suppone che l'AO con cui si realizza l'integratore sia ideale a parte la presenza della tensione di offset di ingresso V_{IO} e delle correnti di polarizzazione I_{B1} ed I_{B2} . Con riferimento al circuito di fig. 2.11, il generatore I_{B1} non ha effetto sull'uscita dell'AO perchè cortocircuitato dal generatore V_{IO} . Per quanto riguarda i generatori rimanenti, I_{B2} e V_{IO} , sfruttando il principio delle masse virtuali (ovvero assumendo $V_- = V_{IO}$) ed effettuando il bilancio delle correnti al morsetto invertente dell'AO si ha:

$$\frac{V_{IO}}{R} + I_{B2} = -C \frac{d}{dt} V_c(t) \quad (2.21)$$

dove $V_c = V_- - V_{out}$.

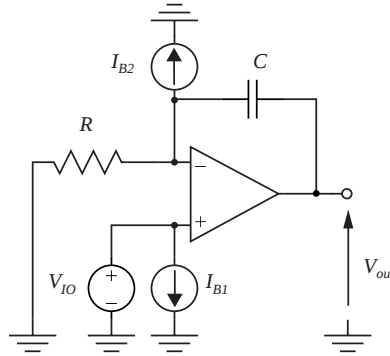


Figura 2.11: Circuito per analizzare la risposta dell'integratore alle correnti di polarizzazione e alla tensione di offset di ingresso dell'AO.

Integrando tra t_0 e $t_0 + t$ la eq. 2.21 e ricordando che sia I_{B2} che V_{IO} sono generatori in continua si ottiene:¹

$$-V_c(t_0 + t) + V_c(t_0) = \frac{V_{IO}}{RC} t + \frac{I_{B2}}{C} t \quad (2.22)$$

Essendo, come già detto, $V_{out} = -V_c + V_- = -V_c + V_{IO}$ si può quindi scrivere, sommando e sottraendo la quantità V_{IO} al primo membro dell'eq. 2.22:

$$\begin{aligned} V_{out}(t_0 + t) &= \frac{V_{IO}}{RC} t + \frac{I_{B2}}{C} t + V_{out}(t_0) \\ &= V_{IO}\left(1 + \frac{t}{RC}\right) + \frac{I_{B2}}{C} t - V_c(t_0) \end{aligned} \quad (2.23)$$

Dal momento che $|V_{out}|$ cresce linearmente con il tempo a causa di I_{B2} e V_{IO} , dalla eq. 2.23 si può notare come l'effetto di questi generatori sia quello, in generale, di far saturare l'AO. La causa di questo comportamento è il guadagno in continua infinito del circuito di fig. 2.6 che si ha nelle ipotesi adottate per l'AO in questo paragrafo. Se si rimuove l'ipotesi di idealità del guadagno dell'AO l'effetto non cambia perchè, come dimostrato nel paragrafo 2.4.3, il guadagno in continua dell'integratore diviene in questo caso uguale al guadagno in continua dell'AO ad anello aperto, A_o , che risulta comunque in generale troppo elevato. In altri termini: se si monta un AO come in fig. 2.6 e lo si alimenta, l'uscita del circuito risulterà in breve tempo saturata, come accade per un AO non retroazionato.

¹Ovviamente l'eq. 2.22, così come la successiva eq. 2.23, vale finchè l'AO non raggiunge la condizione di saturazione.

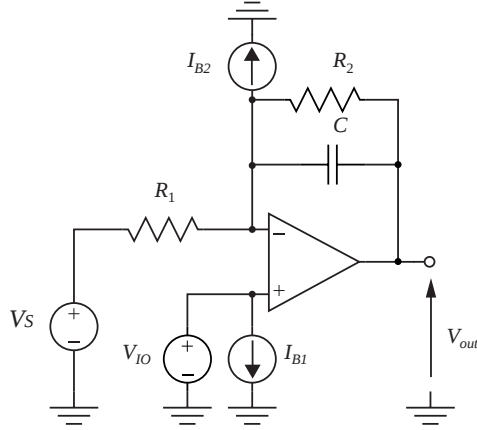


Figura 2.12: Circuito integratore modificato.

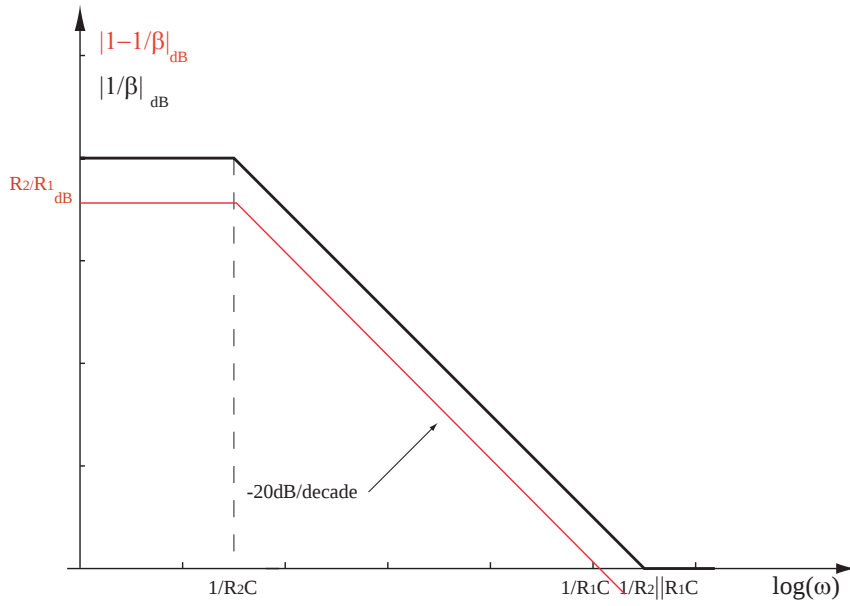


Figura 2.13: Modulo di $1 - \frac{1}{\beta}$ (linea rossa) e modulo di $\frac{1}{\beta}$ (linea nera) riferiti al circuito di fig. 2.12 per AO ideale. A questo proposito si consideri che in questo caso $\frac{1}{\beta} = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \frac{1+j\omega CR_1||R_2}{1+j\omega CR_2}$.

La soluzione che si adotta in pratica per risolvere questo problema consiste nel limitare il guadagno in continua dell'integratore inserendo una resistenza in parallelo al condensatore C , come in fig. 2.12. Se l'AO è ideale, come già discusso nel par. 2.4.2, il guadagno del circuito 2.12 nel dominio della frequenza si può esprimere, rispetto al generatore di ingresso V_s , come:

$$\frac{V_{out}}{V_s} = -\frac{\frac{R_2}{1+j\omega CR_2}}{R_1} = -\frac{R_2}{R_1} \frac{1}{1+j\omega CR_2} \quad (2.24)$$

e l'espressione di V_{out} in funzione di I_{B2} e V_{IO} diventa, a regime:

$$V_{out} = V_{IO}\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) + I_{B2} R_2 \quad (2.25)$$

Dal diagramma di Bode del modulo del guadagno in eq. 2.24 rappresentato in fig. 2.13 risulta chiaro che la scelta del valore di R_2 è frutto di un compromesso: infatti, più è piccola R_2 , minore è l'effetto sulla tensione V_{out} dei generatori I_{B2} e V_{IO} , ma d'altra parte più è piccola R_2 , più il polo $1/\omega CR_2$ si sposta in alta frequenza, riducendo l'intervallo di frequenza in cui il circuito di fig. 2.12 si comporta effettivamente da integratore. L'intervallo in questione, ragionando come nel par. 2.4.3, si ha per $1/CR_2 \leq \omega \leq \omega_T$, se per l'AO vale $\omega_T > 1/CR_1 \parallel R_2$ (infatti, per $\omega \leq 1/CR_2$ si ha $|A_f(\omega)| = R_2/R_1$, mentre per $\omega > \omega_T$, poichè $|\beta A(\omega)|$ diventa < 1 , $|A_f(\omega)|$ cessa di diminuire di $-20dB/decade$).

Tornando allo studio del circuito di fig. 2.12 sotto l'ipotesi di AO ideale, con risposta data dall'eq. 2.24, si sottolinea come la risposta in continua assuma il valore di regime (vedi ad esempio il caso descritto dall'eq. 2.25) dopo un transitorio di tipo esponenziale con costante di tempo $1/R_2C$. Quindi, per tempi di integrazione in cui il transitorio esponenziale è approssimabile con un comportamento lineare, il circuito di fig. 2.12 può essere utilizzato per approssimare il comportamento di un integratore anche per segnali di ingresso in continua (ovvero costanti). A questo scopo si supponga, con riferimento al circuito di fig. 2.14, che l'AO sia ideale, che V_s sia un generatore di tensione costante, e che l'interruttore S si apra al tempo $t = 0$. La corrente $(V_s - V_-)/R_1 = V_s/R_1$ attraversa il bipolo $R_2 \parallel C$, dalla tensione ai cui capi si ha direttamente, finchè vale il principio delle masse virtuali, la tensione V_{out} . Queste considerazioni si traducono nel circuito equivalente di fig. 2.15.a, da cui, sostituendo il generatore equivalente di Thevenin al generatore di corrente I ed alla resistenza R_2 , si ottiene il circuito di fig. 2.15.b.

Dal circuito di fig. 2.15.b, ricordando che in un circuito RC serie alimentato a tensione costante la tensione ai capi del condensatore V_C varia esponenzialmente in accordo con la legge

$$V_C(t) = (V_C(t \rightarrow \infty) - V_C(t = 0)) (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) + V_C(t = 0) \quad (2.26)$$

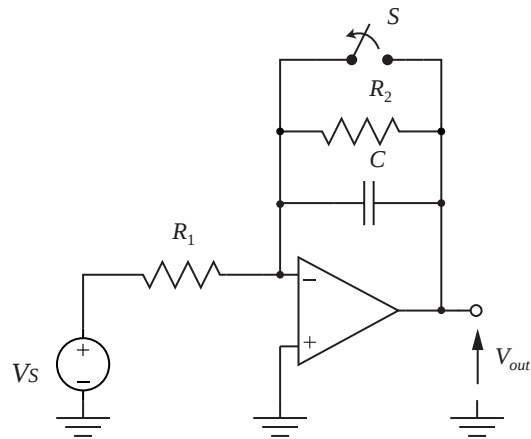


Figura 2.14: Circuito integratore modificato con l'aggiunta di un interruttore per cortocircuitare la capacità C .

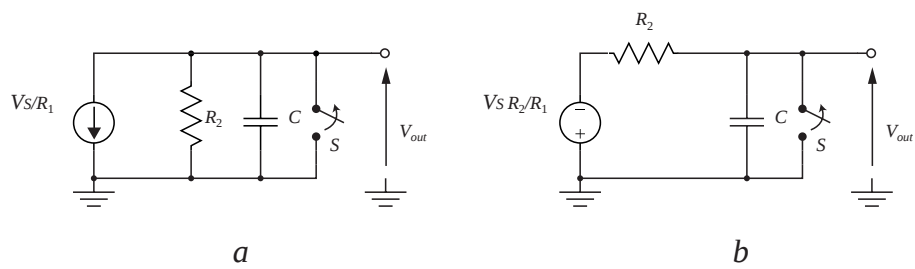


Figura 2.15: Circuito equivalente per l'analisi del circuito 2.14.

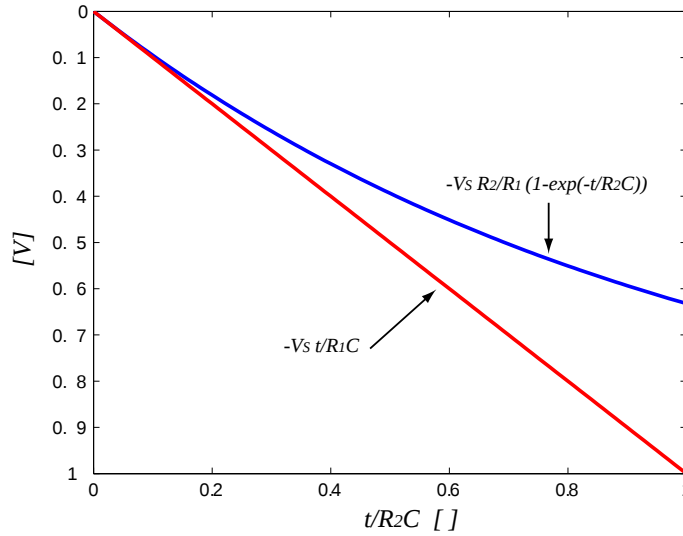


Figura 2.16: Andamento temporale delle eq. 2.27 e 2.28 per $V_S = 100mV$, $R_1 = 1k\Omega$, $R_2 = 10k\Omega$, $C = 1pF$.

si ottiene

$$\begin{aligned} V_{out}(t) &= (-V_S \frac{R_2}{R_1} - V_{out}(t=0)) (1 - e^{\frac{-t}{R_2 C}}) + V_{out}(t=0) \\ &= -V_S \frac{R_2}{R_1} (1 - e^{\frac{-t}{R_2 C}}) \end{aligned} \quad (2.27)$$

L'eq. 2.27, ricordando lo sviluppo di Taylor della funzione $(1 - e^x)$ per $x \ll 1$:

$$1 - e^x = -x + o(x^2),$$

si può approssimare, per $t \ll R_2 C$ come:

$$V_{out}(t) = -V_S \frac{R_2}{R_1} (1 - e^{\frac{-t}{R_2 C}}) \approx -V_S \frac{R_2}{R_1} \frac{t}{R_2 C} = -V_S \frac{t}{R_1 C} \quad (2.28)$$

che corrisponde all'uscita per V_S costante del circuito 2.6. In particolare, per $t/R_2 C < 0.1$, l'errore relativo che si commette utilizzando l'eq. 2.28 al posto della 2.27 è $< 5\%$. I limiti di validità dell'eq. 2.28 sono evidenziati in fig. 2.16.

2.5 AO con rete di retroazione non lineare

In questo paragrafo verranno analizzate alcune applicazioni in cui la rete di retroazione dell'AO è costituita, oltre che da elementi passivi, da diodi e da transistor bipolari.

Per quanto riguarda il diodo, con riferimento alle grandezze definite in fig. 2.17a, si ricorda che la corrente I_D varia in funzione di V_D come:

$$I_D = I_0(e^{\frac{V_D}{\eta V_T}} - 1) \approx I_0 e^{\frac{V_D}{\eta V_T}} \quad \text{per } V_D \gg \eta V_T \quad (2.29)$$

con I_0 corrente di saturazione inversa, η fattore di non idealità ($\eta \approx 2$ per diodi al silicio e valori di corrente dell'ordine dei mA) e $V_T = kT/q$ equivalente in tensione della temperatura. Nella definizione di V_T k è la costante di Boltzmann ($1.38 \cdot 10^{-23}$ J/K), T la temperatura in gradi Kelvin, q la carica dell'elettrone ($1.6 \cdot 10^{-19}$ C); $V_T \approx 26mV$ per $T = 300K$.

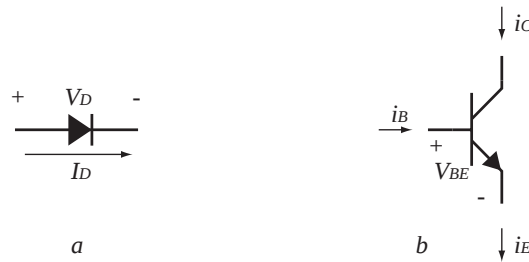


Figura 2.17: Simbolo circuitale del diodo (a) e del BJT di tipo NPN (b).

In questa trattazione, nella sezione 2.5.1, si farà riferimento al modello semplificato del diodo:

$$I_D = \begin{cases} 0 & \text{se } V_D < V_\gamma \\ \text{qualunque } I \in (0, \infty) & \text{se } V_D = V_\gamma \end{cases} \quad (2.30)$$

dove V_γ è la tensione di soglia del diodo ($V_\gamma \approx 0.6$ V per diodi al silicio). Secondo il modello 2.30 il diodo è un circuito aperto per $V_D < V_\gamma$, ed è un generatore ideale di tensione per $V_D = V_\gamma$.

Per quanto riguarda il *BJT*, nei circuiti descritti in questo paragrafo sarà sempre polarizzato in regione attiva (giunzione Base-Elettore - $B - E$ - polarizzata direttamente e giunzione Base-Collettore - $B - C$ - polarizzata inversamente), e con $i_C = \beta_{BJT} i_B \approx i_E$, dove β_{BJT} è il guadagno in corrente del *BJT* nella configurazione emettitore comune (fig. 2.17.b).

2.5.1 Raddrizzatori con e senza saturazione

Si consideri il circuito di fig. 2.18, per il quale si assuma che l'AO sia ideale a meno del guadagno finito $A_o \in \mathbf{R}^+$, e che il comportamento del diodo sia

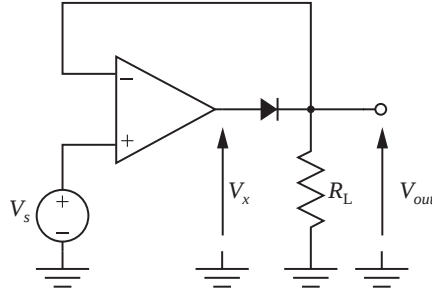


Figura 2.18: Raddrizzatore di precisione a semplice semionda

quello descritto dal modello semplificato 2.30. Nel circuito in questione l'anello di retroazione è aperto finchè il diodo non è in conduzione, ovvero finchè la tensione ai suoi capi $V_D = V_x - V_{out} < V_\gamma$. Essendo inoltre $V_{out} = 0V$ finchè l'anello di retroazione è aperto (sulla resistenza R_L non scorre corrente), i valori di V_s per cui il diodo non conduce sono le soluzioni della disequazione

$$V_D = A_o(V_s - V_{out}) - V_{out} = A_o V_s < V_\gamma \quad (2.31)$$

ovvero $V_s < V_\gamma/A_o$. Per $V_s \geq V_\gamma/A_o$ il diodo conduce e vale la relazione:

$$V_{out} = V_x - V_\gamma = A_o(V_s - V_{out}) - V_\gamma \quad (2.32)$$

dalla quale si ottiene il legame tra V_{out} e V_s per $V_s \geq V_\gamma/A_o$:

$$V_{out} = \frac{A_o V_s}{1 + A_o} - \frac{V_\gamma}{1 + A_o} \quad (2.33)$$

Il legame esistente tra V_{out} e V_s è riportato graficamente in fig. 2.19 (curva nera). In sintesi, aver inserito il diodo nell'anello di retroazione ha permesso di ridurre la sua tensione di soglia, dal punto di vista del generatore V_s , di un fattore pari al guadagno dell'AO. Se si fa tendere $A_o \rightarrow \infty$, la tensione di soglia vista dal generatore V_s tende ad annullarsi (ovvero $V_\gamma/A_o \rightarrow 0V$), ed il circuito di fig. 2.18 si comporta come un *diodo ideale* (il circuito in questione è anche chiamato, per questo motivo, *superdiodo*, o anche *raddrizzatore di precisione a singola semionda*). In questo caso si ha (curva rossa in fig. 2.19):

$$V_{out} = \begin{cases} 0 & \text{se } V_s < 0V \\ V_s & \text{se } V_s > 0V \end{cases} \quad (2.34)$$

Il principale difetto del circuito in fig. 2.18 è che per tensioni negative $V_s <$

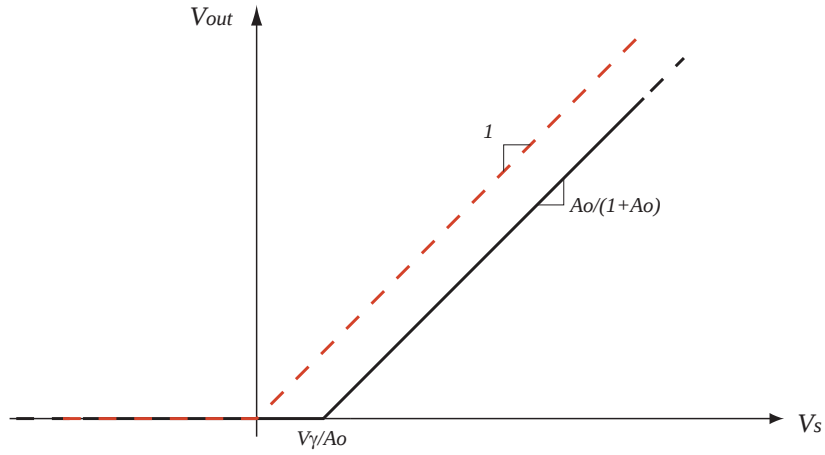


Figura 2.19: Caratteristica di trasferimento del circuito di fig. 2.18 per $A_o < \infty$ (nero) e per $A_o \rightarrow \infty$ (rosso).

$-V_s/A_o$ l'uscita dell'AO satura a $-V_s$. Riportare a lavorare l'AO dalla condizione di saturazione alla condizione di funzionamento lineare richiede un tempo finito, e quindi il circuito di fig. 2.18 ha intrinseci limiti di velocità (ovvero di banda).

Un circuito che funziona da raddrizzatore a semplice semionda con gli stessi vantaggi del circuito di fig. 2.18, ma in cui l'AO non va in saturazione è riportato in fig. 2.20.

Si assuma ancora che l'AO sia ideale a meno del guadagno finito $A_o \in \mathbf{R}^+$, e che il comportamento del diodo sia quello descritto dal modello semplificato 2.30. Nel circuito di fig. 2.20, finchè i due diodi D_1 e D_2 sono entrambi interdetti, il generatore V_s vede un circuito aperto, e quindi $V_s = V_- = V_{out}$. I due diodi sono entrambi interdetti finchè valgono entrambe le seguenti condizioni:

- per il diodo D_1 :

$$\begin{aligned} V_x - V_{out} &= A_o(V_+ - V_-) - V_{out} = -A_o V_s - V_s \\ &= -V_s(1 + A_o) < V_\gamma \end{aligned} \quad (2.35)$$

- per il diodo D_2

$$\begin{aligned} V_- - V_x &= V_s - A_o(V_+ - V_-) = V_s + A_o V_s \\ &= V_s(1 + A_o) < V_\gamma \end{aligned} \quad (2.36)$$

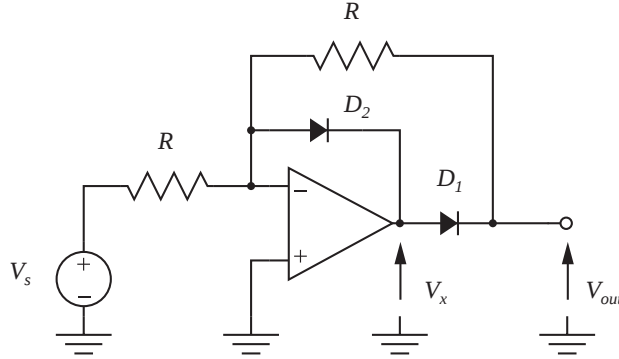


Figura 2.20: Raddrizzatore di precisione a semplice semionda senza saturazione dell'AO

e dunque:

$$V_{out} = V_s \Leftrightarrow -\frac{V_\gamma}{1 + A_o} < V_s < \frac{V_\gamma}{1 + A_o} \quad (2.37)$$

Inoltre, sempre dalle eq. 2.35 e 2.36, per $V_s \geq \frac{V_\gamma}{1 + A_o}$ conduce solo il diodo D_2 , mentre per $V_s \leq -\frac{V_\gamma}{1 + A_o}$ conduce solo il diodo D_1 .

Viene a questo punto analizzato il comportamento del circuito quando D_1 o D_2 sono in conduzione.

- Per ogni valore $V_s \geq \frac{V_\gamma}{1 + A_o}$, essendo D_2 in conduzione, la tensione $V_- - V_x$ resta fissa al valore V_γ , ovvero

$$V_- - V_x = V_- - (-A_o V_-) = V_- (1 + A_o) = V_\gamma \Rightarrow V_- = \frac{V_\gamma}{1 + A_o} \quad (2.38)$$

e quindi $V_{out} = \frac{V_\gamma}{1 + A_o}$, dal momento che la resistenza R in parallelo a D_1 e D_2 è flottante.

- Per ogni valore $V_s \leq -\frac{V_\gamma}{1 + A_o}$ conduce il diodo D_1 , quindi, ricordando che, in generale, essendo chiuso l'anello di retroazione attraverso D_1 , $V_- = \beta V_{out} + (1 - \beta) V_s$, si ha:

$$V_{out} = V_x - V_\gamma = -A_o V_- - V_\gamma = -A_o [\beta V_{out} + (1 - \beta) V_s] - V_\gamma$$

da cui si ottiene:

$$V_{out} = \left(1 - \frac{1}{\beta}\right) \frac{\beta A_o}{1 + \beta A_o} V_s - \frac{V_\gamma}{1 + \beta A_o} \quad (2.39)$$

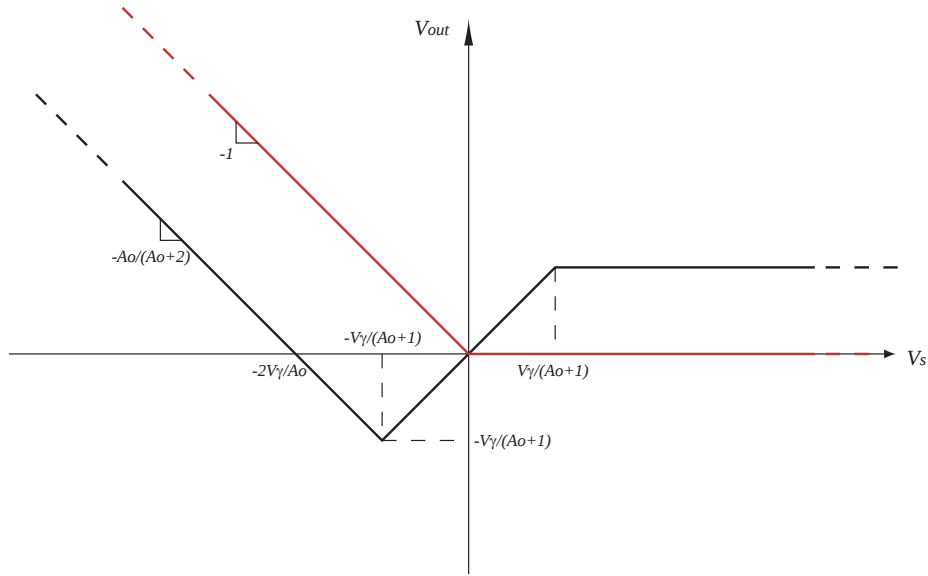


Figura 2.21: Caratteristica di trasferimento del circuito di fig. 2.20 per $A_o < \infty$ (nero) e per $A_o \rightarrow \infty$ (rosso)

Nel caso in esame, essendo $\beta = 0.5$, l'eq. 2.39 diviene:

$$V_{out} = -V_s \frac{A_o}{2 + A_o} - \frac{2 V_\gamma}{2 + A_o} \approx -V_s - \frac{2 V_\gamma}{2 + A_o} \quad (2.40)$$

Dalle eq. 2.37, 2.38, 2.40 si ottiene la caratteristica di trasferimento del circuito di fig. 2.20 riportata in fig. 2.21. Nella stessa figura è riportata anche, in rosso, la caratteristica che si ottiene per $A_o \rightarrow \infty$, ovvero:

$$V_{out} = \begin{cases} 0 & \text{se } V_s > 0V \\ -V_s & \text{se } V_s < 0V \end{cases} \quad (2.41)$$

Come commento finale al circuito di fig. 2.20 ed alla caratteristica di trasferimento riportata in nero in fig. 2.21, la quantità $V_\gamma/(1 + A_o)$ è, considerando i valori tipici di A_o , trascurabile. Diverso è il caso in cui si consideri la dipendenza del guadagno dell'AO dalla frequenza: in questo caso, per $f \rightarrow f_T$ (ovvero per $|A(f)| \rightarrow 1$), lo scostamento tra le due curve di fig. 2.21 diventa significativo.

I circuiti fin qui discussi sono raddrizzatori a semplice semionda, mentre il calcolo del valore assoluto di un segnale richiede in generale l'utilizzo di un raddrizzatore a doppia semionda, che può essere realizzato mediante il circuito in

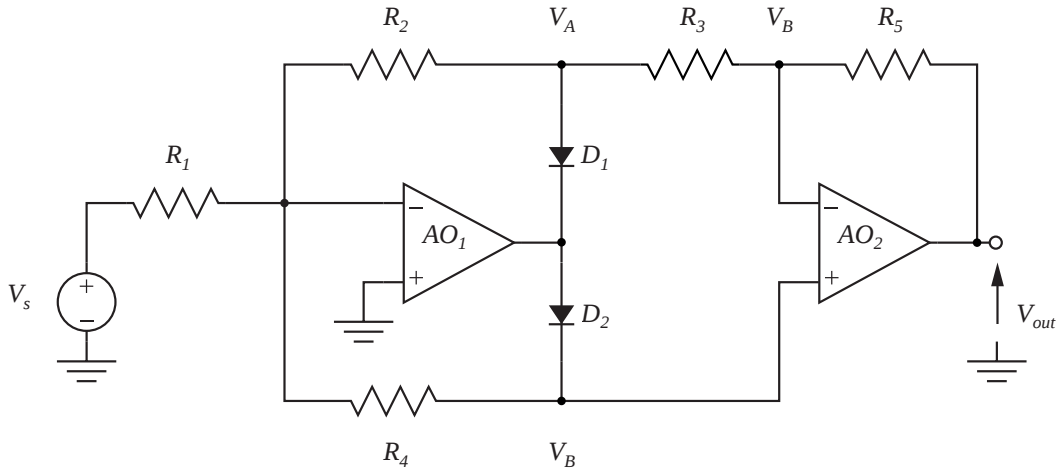


Figura 2.22: Raddrizzatore a doppia semionda

figura 2.22. L'analisi del circuito in in figura 2.22 viene di seguito effettuato nell'ipotesi che gli AO siano ideali (si ricorda che se l'AO è ideale l'effetto sul diodo posto nell'anello di retroazione è quello di annullarne la tensione di soglia), e che $R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = R$. L'effetto del guadagno finito degli AO può essere comunque facilmente incluso procedendo come nell'analisi dei raddrizzatori a semplice semionda.

- Sia $V_s > 0$: in questo caso il diodo D_1 è in conduzione mentre il diodo D_2 è interdetto. Essendo $V_-(AO_1)$ un punto di massa virtuale, e visto che su R_4 non scorre corrente, $V_A = -\frac{R_2}{R_1}V_s = -\frac{R}{R_1}V_s$. Anche $V_-(AO_2) = V_B$ è un punto di massa virtuale, visto che su R_4 non scorre corrente, quindi:

$$V_{out} = -\frac{R_5}{R_3}V_A = -\frac{R_5}{R_3} \left(-\frac{R_2}{R_1}V_s\right) = \frac{R}{R_1}V_s$$

- Sia $V_s < 0$: in questo caso il diodo D_2 è in conduzione mentre il diodo D_1 è interdetto. In questo caso sia su R_4 che su R_2 scorre corrente, e il potenziale V_B si determina dal bilancio delle correnti al morsetto invertente di AO_1 :

$$\frac{V_s}{R_1} = -\frac{V_B}{R_4} - \frac{V_B}{R_2 + R_3} = -\frac{3}{2} \frac{V_B}{R}$$

da cui si ricava $V_B = -\frac{2}{3} \frac{R}{R_1}V_s$. AO_2 rispetto a V_B è un amplificatore in configurazione non invertente con guadagno:

$$\frac{V_{out}}{V_B} = 1 + \frac{R_5}{R_2 + R_3} = \frac{3}{2}$$

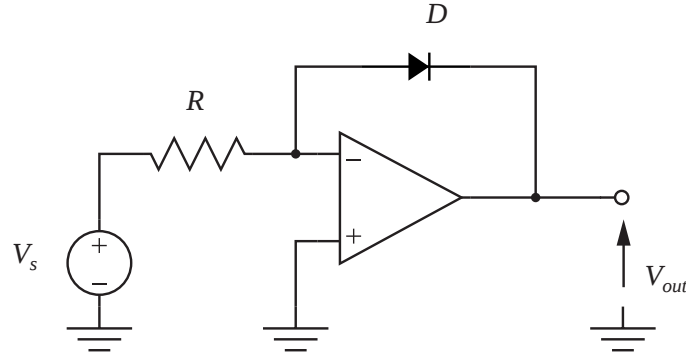


Figura 2.23: Amplificatore logaritmico

per cui

$$V_{out} = \frac{3}{2} V_B = \frac{3}{2} \left(-\frac{2}{3} \frac{R}{R_1} V_s \right) = -\frac{R}{R_1} V_s$$

2.5.2 Amplificatore logaritmico e antilogaritmico

L'amplificatore logaritmico ed il suo duale, l'amplificatore antilogaritmico, sono circuiti che venivano utilizzati, prima dell'avvento degli elaboratori digitali, per poter effettuare il prodotto di due segnali elettrici trasformandolo in una somma sfruttando la nota proprietà della funzione logaritmo. Essendo circuiti che oggi hanno un utilizzo limitato, verranno trattati in questa sezione soltanto in riferimento allo schema di principio, di cui verranno tuttavia evidenziati i limiti. Si consideri il circuito di fig. 2.23, si assuma ideale l'AO e si consideri per il diodo l'espressione della corrente data dall'eq. 2.17. Per tensioni V_s positive il diodo D è in conduzione e vale il principio delle masse virtuali; osservando che in queste condizioni $V_{out} = -V_D$ si ha quindi:

$$I_D = \frac{V_s}{R} \approx I_0 e^{\frac{V_D}{\eta V_T}} \approx I_0 e^{\frac{-V_{out}}{\eta V_T}} \quad (2.42)$$

Dalla eq. 2.42, in cui si è supposto che V_s sia tale per cui $V_D \gg \eta V_T$, si ottiene

$$V_{out} = -\eta V_T \ln \left(\frac{I_D}{I_0} \right) = -\eta V_T (\ln I_D - \ln I_0) \quad (2.43)$$

In fig. 2.24 è riportato lo schema di principio di un amplificatore antilogaritmico. Per l'analisi di questo circuito si fanno le stesse assunzioni già fatte per l'analisi dell'amplificatore logaritmico, e si assume inoltre che i due diodi siano uguali. Per entrambi gli AO vale il principio delle masse virtuali (il diodo $D1$ è

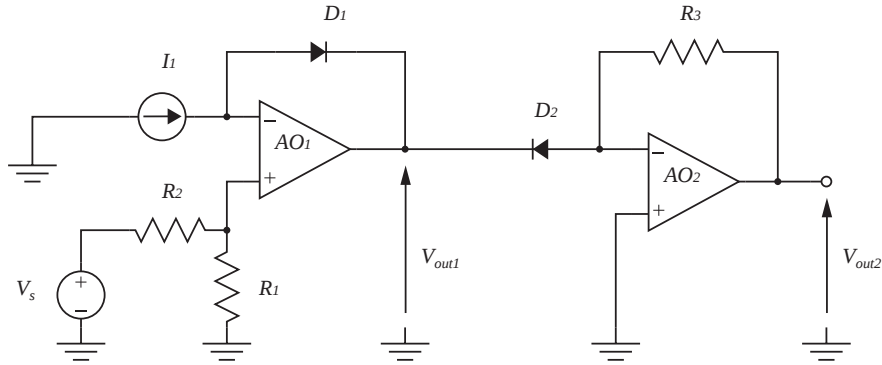


Figura 2.24: Amplificatore antilogaritmico

sicuramente in conduzione con corrente $I_{D1} = I_1$). Si ha quindi:

$$V_{out1} = -\eta V_T \ln \left(\frac{I_1}{I_0} \right) + V_s \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad (2.44)$$

Grazie al principio delle masse virtuali applicato ad AO_2 , $V_{out1} = -V_{D2}$. Supponendo che anche $D2$ sia in conduzione (il partitore $R_1 - R_2$ serve a scalare opportunamente la tensione V_s per garantire $V_{D2} > \eta V_T$), e osservando che $I_{D2} = V_{out2}/R_3$, si ha quindi anche:

$$V_{out1} = -\eta V_T \ln \left(\frac{I_{D2}}{I_0} \right) = -\eta V_T \ln \left(\frac{V_{out2}}{R_3 I_0} \right) \quad (2.45)$$

Combinando le eq. 2.44 e 2.45 si ottiene infine:

$$V_{out2} = R_3 I_1 \exp \left(-V_s \frac{R_1}{R_1 + R_2} \frac{1}{\eta V_T} \right) \quad (2.46)$$

Il problema principale dei circuiti in fig. 2.23 e 2.24 è che V_{out} dipende, oltre che da V_s , anche dalla temperatura. Dipendono infatti dalla temperatura T sia il termine V_T che la corrente di saturazione inversa I_0 , per la quale si può assumere che raddoppi per ogni incremento di T di 10 gradi. Questo inconveniente si può ovviare modificando la struttura dei due circuiti, ma questi aspetti, come già anticipato, non verranno discussi in questa trattazione.

2.5.3 Ulteriori esempi di AO con rete di retroazione non lineare

In fig. 2.25 sono riportati tre possibili configurazioni di generatori di corrente basati su AO. In tutti e tre i casi nella rete di retroazione è presente una delle due

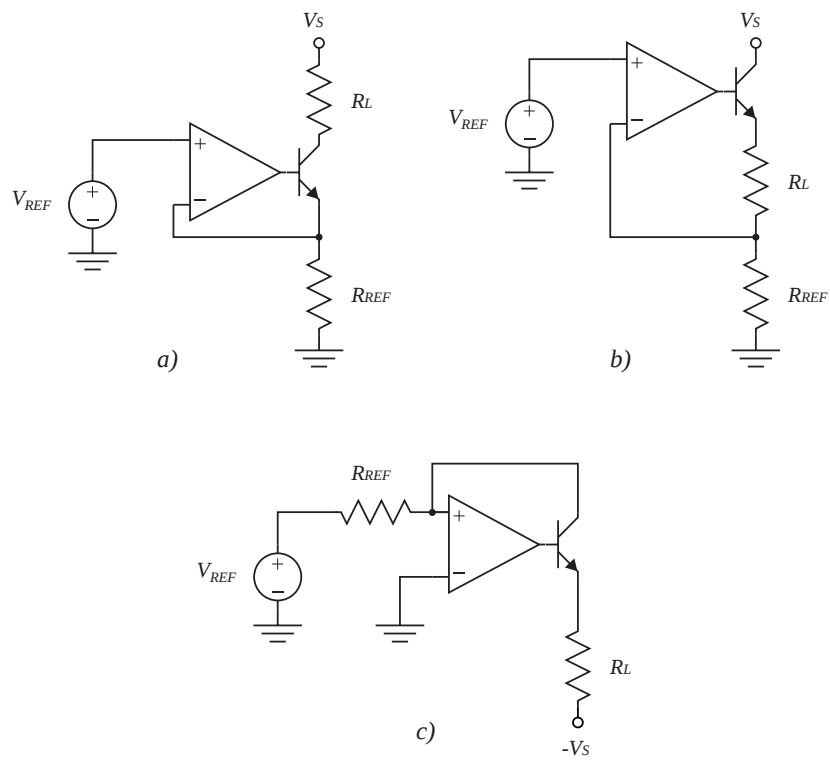


Figura 2.25: Generatori di corrente basati su AO

giunzioni di un BJT ($B - E$ per i circuiti 2.25.a e 2.25.b, $B - C$ per il circuito 2.25.c), quindi l'analisi si effettua come già visto nel caso dei raddrizzatori (a questo scopo si sottolinea come anche nel caso del circuito di fig. 2.25.c, quando la giunzione $B - C$ è polarizzata inversamente e la giunzione $B - E$ direttamente, l'AO sia retroazionato in modo negativo: infatti, pur essendo la rete di retroazione chiusa sull'ingresso non invertente dell'AO, essendo alle variazioni la tensione sul collettore del BJT sfasata di 180 gradi rispetto alla tensione del terminale di base, la retroazione risulta di tipo negativo).

Supponendo gli AO ideali, nei circuiti di fig. 2.25.a e 2.25.b, per $V_{REF} > 0$ V la giunzione $B - E$ del BJT è in conduzione e, in accordo con il principio delle masse virtuali, ai capi della resistenza R_{REF} si stabilisce una differenza di potenziale uguale a V_{REF} , e scorre quindi la corrente $I_{REF} = V_{REF}/R_{REF}$. Essendo in entrambi i casi i BJT polarizzati in regione attiva (la giunzione $B - C$ è, per le tensioni in gioco, polarizzata inversamente), il carico R_L è attraversato, nel caso del circuito di fig. 2.25.b, dalla corrente $i_E = I_{REF}$, e nel caso del circuito di fig. 2.25.a dalla corrente $i_C \approx i_E = I_{REF}$. La differenza fra i due circuiti è solo nella connessione del carico, che nel caso del circuito in fig. 2.25.b è completamente fuori massa.

L'analisi del circuito in fig. 2.25.c si effettua in maniera simile a quella degli altri due circuiti: per $V_{REF} > 0$ V l'uscita dell'AO assume il valore negativo che consente di avere $i_C = V_{REF}/R_{REF}$. La corrente che scorre sul carico R_L è quindi (si sottolinea che il BJT è in regione attiva, essendo l'uscita dell'AO negativa ed essendo il morsetto non invertente un punto di massa virtuale): $i_E \approx i_C = I_{REF} = V_{REF}/R_{REF}$.

Come commento generale ai circuiti di fig. 2.25, si sottolinea come un generatore di corrente costante si possa realizzare con un AO anche senza ricorrere ad un BJT (si veda ad esempio il circuito di fig. 2.26, in cui il carico R_L è attraversato dalla corrente $I_{REF} = V_{REF}/R_{REF}$). L'utilizzo del BJT, ovvero di un dispositivo che guadagna in corrente, si rende necessario quando non si vuole limitare la corrente sul carico alla corrente massima erogabile dall'AO che, come discusso nel precedente capitolo, è tipicamente dell'ordine delle decine di mA.

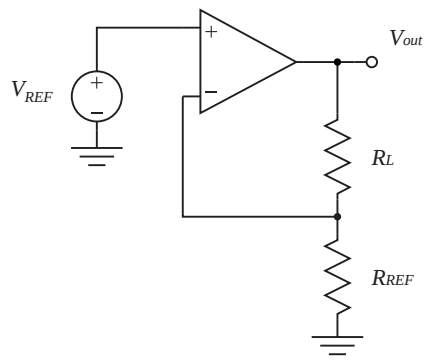


Figura 2.26: Generatore di corrente basato su AO senza BJT