

Il luogo delle radici (ver. 2.5a)

Sia dato il sistema in retroazione unitaria riportato in Fig. 1.1. Il luogo delle radici è uno strumento mediante il quale è possibile valutare la posizione dei poli della funzione ad anello chiuso nel piano complesso al variare del guadagno k .

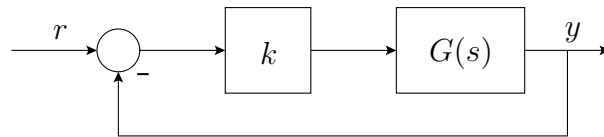


Figura 1.1: Schema in retroazione utilizzato per la determinazione del luogo delle radici.

Esempio 1.1

Supponiamo di avere:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)}.$$

La funzione in catena diretta risulterà:

$$L(s) = k G(s) = \frac{k}{s(s+2)},$$

mentre la funzione dell'anello chiuso sarà:

$$\bar{G}(s) = \frac{k}{s(s+2) + k} = \frac{k}{s^2 + 2s + k}.$$

Poiché i poli di $\bar{G}(s)$ sono gli zeri dell'equazione caratteristica $s^2 + 2s + k = 0$, avremo:

$$p_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 - k}.$$

Risulta quindi che per $k = 0$ (anello aperto) le radici sono 0 e -2 .

Sarà quindi possibile tracciare sul piano complesso l'andamento dei poli al variare di k , considerando sia i valori positivi che negativi. Ciò che otterremo è riportato in Fig. 1.2. Tale figura rappresenta il luogo delle radici del sistema in esame; il diagramma calcolato per $k > 0$ si dice luogo diretto, mentre quello per $k < 0$ si dice luogo complementare.

Dalla figura si può notare che per $k = 1$ le due radici risultano coincidenti in -1 .

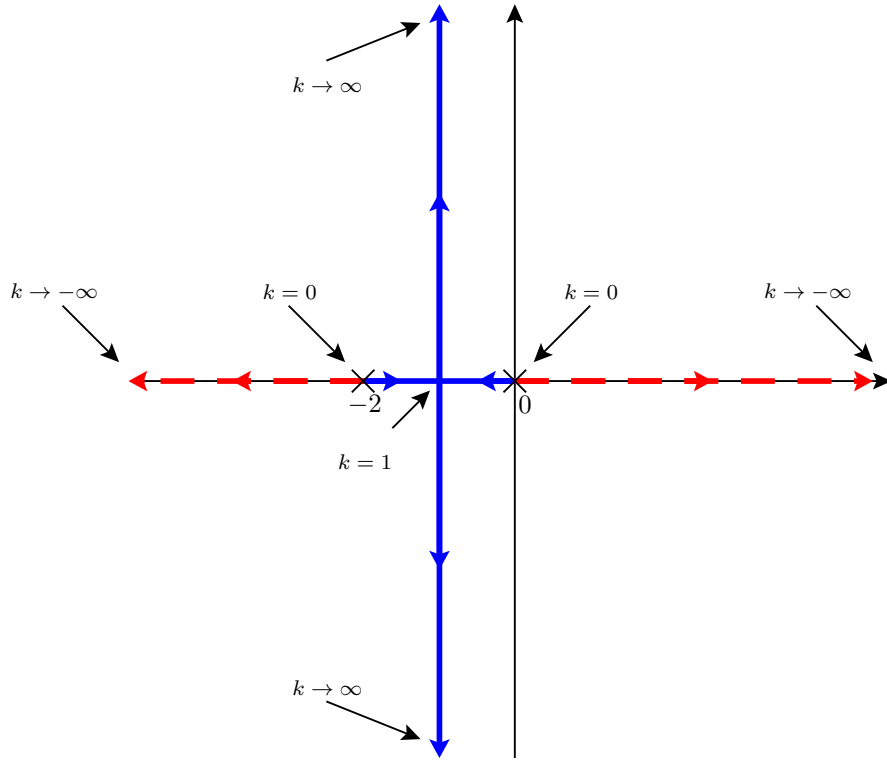


Figura 1.2: Esempio di luogo delle radici; (—)=diretto, (---)= complementare.

Notare che la retroazione cambia i poli del sistema mantenendo invariati gli zeri rispetto all'anello aperto.

Esprimiamo $G(s)$ nella forma zeri-poli

$$G(s) = k_G \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)} \quad \text{con } m < n.$$

Possiamo quindi scrivere la funzione in catena diretta $L(s)$ come:

$$L(s) = k G(s) = k k_G \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)}.$$

Definendo $k^* = k k_G$ si può esprimere L come funzione della variabile complessa s e del guadagno k^* . Possiamo quindi scrivere:

$$L(s; k^*) = k^* \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)}. \quad (1.1)$$

L'equazione caratteristica $1 + L(s, k^*) = 0$ risulta:

$$1 + k^* \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)} = 0$$

cioè:

$$\prod_{i=1}^n (s - p_i) + k^* \prod_{i=1}^m (s - z_i) = 0$$

ovvero:

$$\prod_{i=1}^n (s - p_i) = -k^* \prod_{i=1}^m (s - z_i). \quad (1.2)$$

Affinché la (1.2) sia verificata è necessario che siano soddisfatte le seguenti due condizioni:

- **condizione di modulo:**

$$|k^*| = \frac{\prod_{i=1}^n |s - p_i|}{\prod_{i=1}^m |s - z_i|}$$

- **condizione di fase:**

$$\sum_{i=1}^n \angle(s - p_i) - \sum_{i=1}^m \angle(s - z_i) = \pi + \angle k^* + 2h\pi \quad , \quad h \in \mathbb{Z}$$

cioè:

$$\sum_{i=1}^n \angle(s - p_i) - \sum_{i=1}^m \angle(s - z_i) = \begin{cases} (2h+1)\pi & \text{luogo diretto } (k^* > 0) \\ 2h\pi & \text{luogo complementare } (k^* < 0). \end{cases} \quad (1.3)$$

Dalla condizione di fase, che definisce il luogo diretto e quello complementare, risulta che il luogo da tracciare sarà quello diretto nel caso di retroazione negativa e k^* positivo oppure retroazione positiva e k^* negativo. Viceversa, il luogo complementare dovrà essere utilizzato nel caso di retroazione negativa e k^* negativo oppure di retroazione positiva e k^* positivo.

Occorre prestare attenzione al fatto che $k^* = k k_G$. Poiché k_G è il guadagno del sistema (e non può essere cambiato), il nostro interesse si focalizzerà sulla posizione dei poli del sistema in anello chiuso al variare di k .

1.1 Regole per il tracciamento del luogo delle radici

Di seguito sono riportate le principali regole utili per il tracciamento del luogo delle radici.

- Il luogo delle radici possiede n rami (n = numero dei poli).
- Tutti i rami originano dai poli ad anello aperto del sistema ($k^* = 0$).
- Per $|k^*| \rightarrow \infty$, m rami tendono agli zeri, mentre $(n - m)$ tendono all'infinito.
- Un punto dell'asse reale appartiene al luogo diretto se ha un numero dispari di singolarità sull'asse reale alla sua destra, altrimenti appartiene al luogo complementare.

Dimostrazione.

Questa proprietà può essere facilmente dimostrata a partire dalla condizione di fase. Si consideri infatti il caso riportato in Fig. 1.3. Per ogni punto sull'asse reale $\hat{s}$ a sinistra di un polo o di uno zero, risulterà $\angle(\hat{s} - p) = \pi$, mentre per ogni punto $\bar{s}$ a destra, avremo $\angle(\bar{s} - p) = 0$. E' opportuno notare che il contributo di eventuali singolarità complesse è sempre pari a zero, per cui possono essere trascurate in questa fase. $\square$

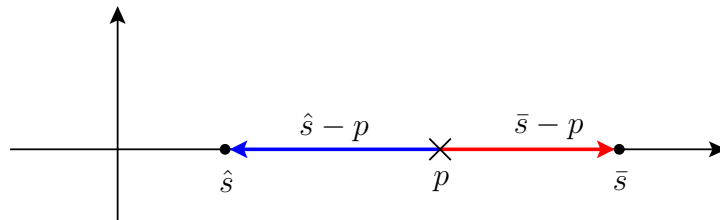


Figura 1.3: Determinazione del luogo delle radici per i punti sull'asse reale.

- Gli $(n - m)$ rami che tendono all'infinito per $|k^*| \rightarrow \infty$ (corrispondenti agli zeri all'infinito della $L(s)$), seguono degli asintoti centrati in:

$$s_0 = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i}{n - m} \quad (\text{centro stella}). \quad (1.4)$$

Tali asintoti formano una stella regolare la cui fase è:

$$\begin{cases} \frac{(2h+1)\pi}{n-m}, & h \in \mathbb{Z} \quad \text{per il luogo diretto} \\ \frac{2h\pi}{n-m}, & h \in \mathbb{Z} \quad \text{per il luogo complementare.} \end{cases} \quad (1.5)$$

Dimostrazione.

Dimostriamo che la fase degli asintoti coincide con la (1.5). Consideriamo per semplicità solo il luogo diretto. Poiché si intende studiare la posizione degli $(n - m)$ rami che tendono all'infinito, si consideri un generico punto s sul piano complesso molto distante dai poli e dagli zeri della $G(s)$. Rispetto a questo punto, risulterà

$$\angle(s - p_i) = \angle(s - z_j) \triangleq \phi \quad , \quad i = 1, \dots, n \quad , \quad j = 1, \dots, m.$$

Affinché la condizione di fase sia verificata dovrà quindi valere

$$n\phi - m\phi = (2h + 1)\pi$$

da cui

$$\phi = \frac{(2h + 1)\pi}{n - m}.$$

□

- Il luogo delle radici è sempre simmetrico rispetto all'asse reale.
- Le intersezioni tra i rami, che avvengono sempre secondo una stella regolare, sono i punti singolari della mappa $F(s; k^*) = 1 + L(s, k^*) = 0$. Tali punti soddisfano:

$$\begin{cases} F(s; k^*) = 0 & \text{affinché sia un punto del luogo} \\ \frac{\partial F}{\partial s} = 0 & \text{affinché sia un punto di emersione (o immersione).} \end{cases}$$

Vale inoltre che nel punto di emersione il valore di k^* è massimo. In Fig. 1.4 è riportato l'andamento di k^* per la funzione dell'esempio 1.1.

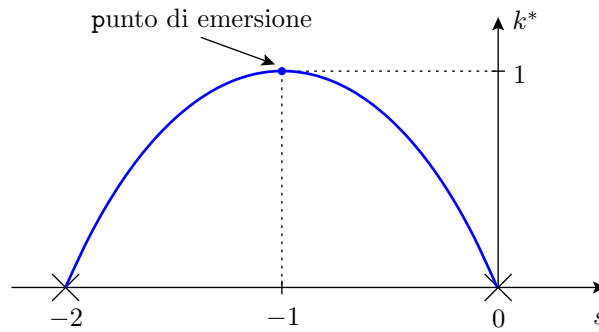


Figura 1.4: Andamento di k^* per l'esempio 1.1.

1.2 Esempi di luoghi delle radici

Esempio 1.2

Sia data la seguente funzione di trasferimento:

$$L(s) = k \frac{(s+1)}{s^2(s+3)}.$$

Il luogo delle radici è riportato in Fig. 1.5.

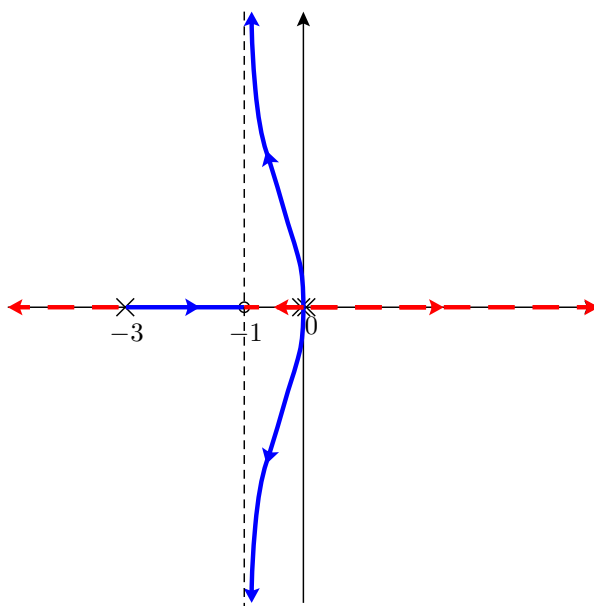


Figura 1.5: Luogo diretto (—) e complementare (---) per il sistema dell'esempio 1.2.

Il centro stella risulta:

$$s_0 = \frac{-3+1}{2} = -1$$

mentre gli asintoti formano angoli pari a:

$$\varphi_0 = \begin{cases} \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\} & \text{per il luogo diretto} \\ \{0, \pi\} & \text{per il luogo complementare.} \end{cases}$$

Possiamo quindi dedurre che per $k < 0$ il sistema in anello chiuso sarà sempre instabile (1 polo nel semipiano destro), mentre per $k > 0$ il sistema sarà sempre stabile.

Esempio 1.3

Sia data la seguente funzione di trasferimento:

$$L(s) = k \frac{1}{(s-2)^2 (s^2+1) (s+1)^2}.$$

Il luogo delle radici è riportato in Fig. 1.6.

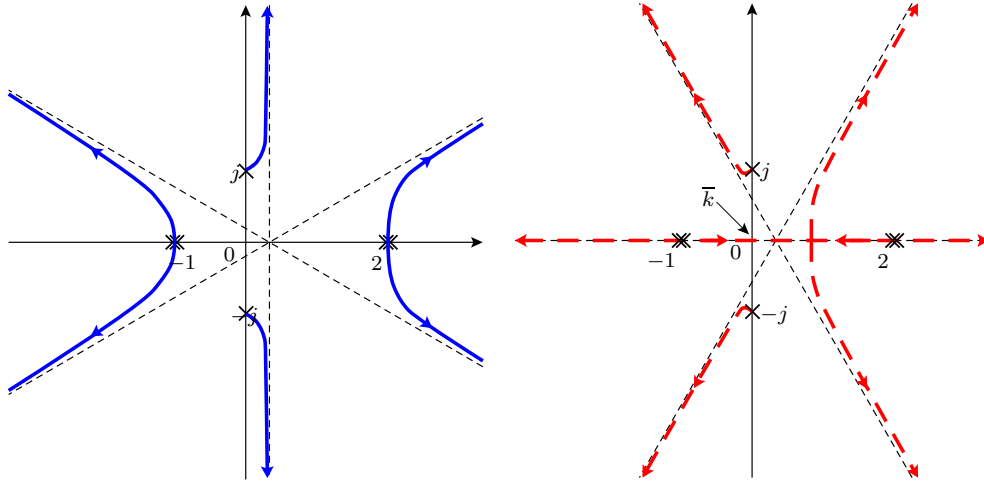


Figura 1.6: Luogo diretto (—) e complementare (---) per il sistema dell'esempio 1.3.

Il centro stella risulta:

$$s_0 = \frac{2 + 2 + j - j - 1 - 1}{6} = \frac{1}{3}$$

mentre gli asintoti formano angoli pari a:

$$\varphi_0 = \begin{cases} \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6} \right\} & \text{per il luogo diretto} \\ \left\{ 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right\} & \text{per il luogo complementare.} \end{cases}$$

La funzione ad anello chiuso presenterà quindi 4 poli instabili per $k > 0$. Per $k < 0$ avremo invece due casi: se $|k| < \bar{k}$ si avranno 2 poli instabili, mentre se $|k| > \bar{k}$ avremo 3 poli instabili.

Esempio 1.4

Sia data la seguente funzione di trasferimento:

$$L(s) = k \frac{s+1}{s(s-1)(s+3)}.$$

Il luogo delle radici è riportato in Fig. 1.7.

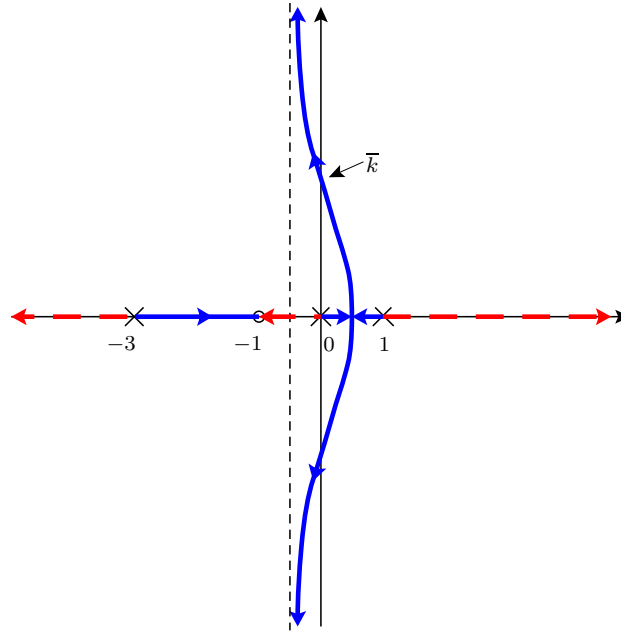


Figura 1.7: Luogo diretto (—) e complementare (---) per il sistema dell'esempio 1.4.

Il centro stella risulta $s_0 = -0.5$ mentre gli asintoti formano angoli pari a:

$$\varphi_0 = \begin{cases} \left\{ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\} & \text{per il luogo diretto} \\ \{0, \pi\} & \text{per il luogo complementare.} \end{cases}$$

Risulta quindi che la funzione ad anello chiuso è stabile solo per $k > \bar{k}$. Per $0 < k < \bar{k}$ avremo 2 poli instabili, mentre per $k < 0$ si avrà un solo polo instabile.

Esempio 1.5

Sia data la seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{s}{(s+2)^2(s^2+1)}.$$

Si voglia tracciare il luogo delle radici diretto.

In Fig. 1.8 sono riportati due possibili luoghi, entrambi soddisfacenti le regole riportate nella della sezione 1.1. Naturalmente la discussione della stabilità risultante dai due luoghi è ben diversa. Il luogo di figura 1.8-a rappresenta un sistema stabile per $0 < k < \bar{k}$, mentre quello di figura 1.8-b sarà instabile per ogni $k > 0$. Risulta evidente che in questo caso per tracciare il luogo corretto è necessario calcolare la fase di uscita del luogo dai due poli immaginari. Per fare questo possiamo applicare la condizione di fase (1.3) in un intorno

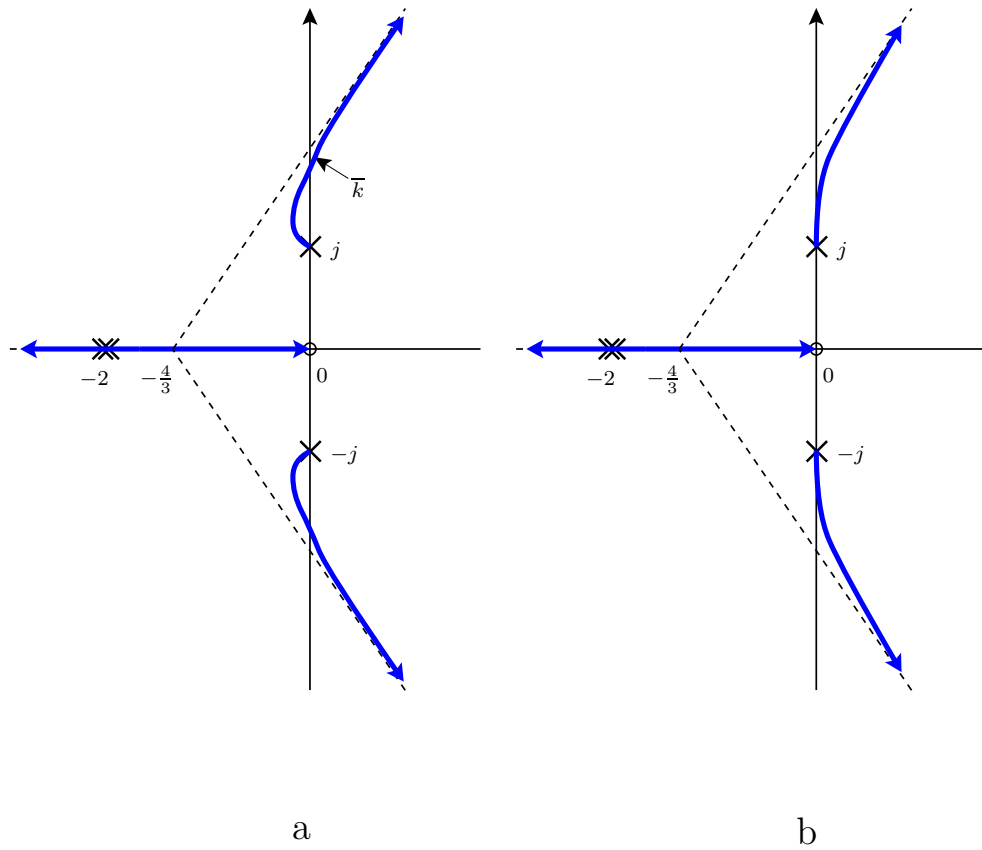


Figura 1.8: Esempio 1.5. Quale di questi due luoghi diretti è corretto?

del polo $+j$ (o $-j$). Dovrà quindi risultare:

$$\sum_{i=1}^n \angle(s - p_i) - \sum_{i=1}^m \angle(s - z_i) = (2h + 1)\pi$$

$$2\angle(s + 2) + \angle(s - j) + \angle(s + j) - \angle(s - 0) = (2h + 1)\pi$$

Poiché scegliamo s in un intorno di $+j$ avremo (supponiamo di scegliere $h = 0$):

$$2 \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \angle(s - j) + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \pi$$

$$\angle(s - j) = -2 \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \pi \simeq 2.21.$$

La fase di uscita dal polo $+j$ risulta quindi essere pari a 2.21 radianti, equivalenti a 127° . Il luogo delle radici corretto sarà quindi quello di figura 1.8-a.

Per completezza, il luogo complementare (corretto) è riportato in Fig. 1.9. In questo caso il numero di poli instabili risulta essere pari a 2 per ogni valore $k < 0$.

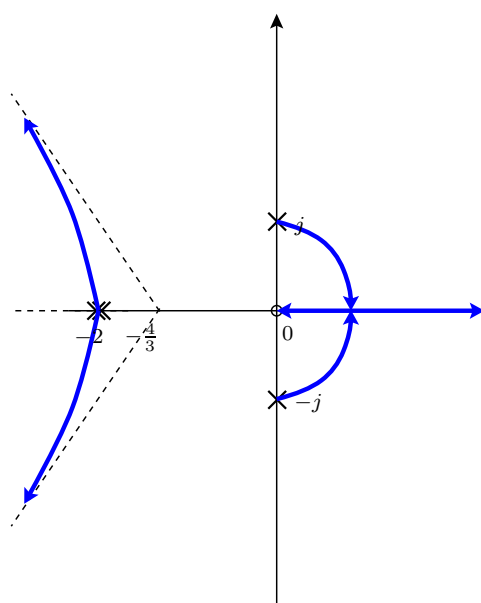


Figura 1.9: Esempio 1.5. Luogo complementare.