
Sistemi e modelli (ver. 2.5)

1.1 Elementi introduttivi

L'Automatica studia l'analisi dei sistemi dinamici ed il progetto dei controlli automatici, ovvero la realizzazione di dispositivi utilizzati per imporre ai sistemi un certo comportamento desiderato, senza che sia necessario l'intervento di un operatore umano.

1.1.1 Sistemi, modelli, metodi di controllo

Definizione 1.1 *Sistema o Impianto: un oggetto fisico di natura o complessità qualsiasi, a cui deve essere imposto un certo comportamento. Ogni sistema interagisce con l'esterno (tutto ciò che non fa parte del sistema) tramite dei segnali, che si suddividono in indipendenti (cause, ingressi) e dipendenti (effetti, uscite).*

Definizione 1.2 *Variabili indipendenti: sono dette variabili indipendenti gli ingressi del sistema. Si dividono in due gruppi:*

1. *Variabili di controllo (manipolabili): sono tutte quelle variabili che possono essere modificate arbitrariamente.*
2. *Variabili incerte: sono quelle variabili che non possono essere manipolate direttamente. Rappresentano i disturbi, o più generalmente ciò che è incognito nel sistema. Si possono ulteriormente suddividere in variabili incerte misurabili e non misurabili.*

La Fig. 1.1 riporta una rappresentazione schematica di un generico sistema.

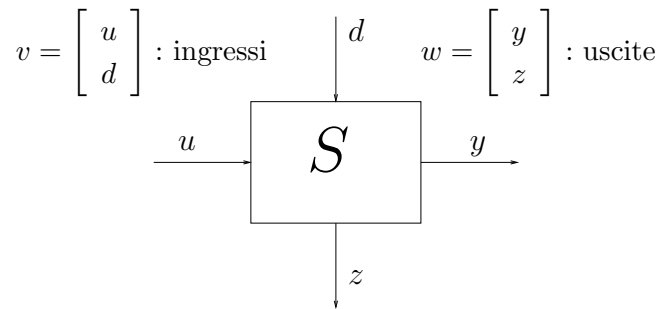


Figura 1.1: Rappresentazione schematica di un sistema.

Definizione 1.3 *Variabili dipendenti: sono dette variabili dipendenti, o effetti, le uscite del sistema. Dipendono dall'evoluzione di tutte le variabili di ingresso. Si possono dividere in due gruppi:*

1. *Variabili controllate: sono le variabili a cui si vuole imporre un assegnato comportamento.*
2. *Variabili misurate: sono le variabili che permettono di avere informazioni sul sistema. Queste sono utilizzate in genere per modificare opportunamente le variabili di controllo. Spesso coincidono con le variabili controllate.*

Definizione 1.4 *Modello matematico: è una rappresentazione del sistema reale tramite un insieme di relazioni matematiche. Pur non descrivendo esattamente il suo comportamento, il modello permette di formulare in maniera matematica il problema di controllo. La complessità del modello dipende dal sistema che si deve descrivere e dall'uso che se ne intende fare (simulazione, progetto del controllo).*

1.1.2 Sistemi di controllo e compiti del progettista

Definizione 1.5 *Problema di controllo: Sia dato un sistema (vedi Fig. 1.1) ed una variabile $r(t)$, detta variabile di riferimento, che descriva il comportamento desiderato delle variabili controllate. La soluzione al problema di controllo consiste nel determinare per ogni istante t l'ingresso di controllo $u(t)$ (in base alle informazioni disponibili) in modo che la variabile controllata $y(t)$ sia sufficientemente vicina a $r(t)$ per ogni andamento ammissibile dei disturbi.*

Si possono introdurre due diversi tipi di controllo, che utilizzano una diversa tipologia di informazione disponibile:

1. Controllo ad anello aperto (o in catena diretta): questa tecnica prevede la scelta del valore delle variabili di controllo u sulla base delle variabili di riferimento r e delle variabili incerte misurabili d_m .
2. Controllo ad anello chiuso (o in retroazione): questa tecnica determina il valore delle variabili di controllo u in funzione della variabile di riferimento r , delle variabili incerte misurabili d_m e delle uscite misurate z del sistema.

La struttura dello schema di controllo nei due casi è riportato in Fig. 1.2, dove il blocco C che genera il valore delle variabili di controllo è detto “controllore” o “regolatore”.

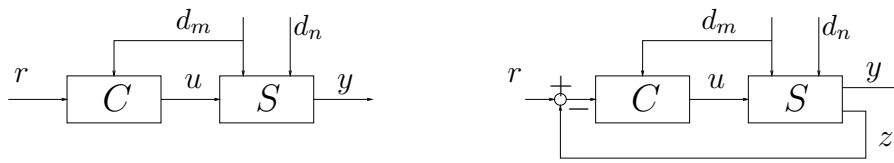


Figura 1.2: Tipi di controllo: ad anello aperto (a sinistra) e in retroazione (a destra).

Controllo in anello aperto (feedforward)

In uno schema di controllo ad anello aperto, l'ingresso al sistema da controllare viene determinato unicamente dai segnali di riferimento desiderati e dai valori delle variabili incerte misurabili. Questa struttura presenta i seguenti svantaggi:

- Impossibilità di poter correggere l'uscita del sistema a fronte di disturbi non misurabili. L'assenza di un anello di retroazione sul sistema impedisce al controllore di conoscere l'effettivo andamento dell'uscita, rendendo impossibile ogni tipo di correzione dovuto a disturbi non misurabili (d_n).
- Impossibilità di poter correggere l'uscita del sistema a fronte di variazioni del sistema stesso o imprecisioni nella rappresentazione dello stesso. Non è infatti infrequente che un sistema reale possa modificare il proprio comportamento con il tempo, a causa ad esempio di usura o eccessivo stress dei componenti. Inoltre, poiché il sistema di controllo ad anello aperto fornisce il valore del controllo in base ad un modello matematico del sistema fisico, può risultare che tale modello non sia adeguatamente accurato e che quindi il segnale di controllo non sia anch'esso corretto.
- Impossibilità di controllare sistemi instabili. Non disponendo di una misura della variabile da controllare, risulta impossibile stabilizzare un sistema instabile a causa di inevitabili errori di modello (anche piccoli) e disturbi agenti sul sistema.

Tale struttura presenta anche dei vantaggi, quali:

- Maggiore semplicità del controllore. In generale, una legge di controllo ad anello aperto risulta piuttosto semplice da realizzare, in quanto gli unici ingressi del controllore risultano essere i segnali di riferimento e, in taluni casi, i segnali relativi agli ingressi misurabili. Tale semplicità si rispecchia anche nel tempo di elaborazione, che risulterà, in generale, estremamente ridotto.
- Assenza di meccanismi di trasduzione (sull'uscita). La configurazione di controllo ad anello aperto, per definizione, non necessita di trasduttori sull'uscita. Questo semplifica notevolmente la struttura di tale sistema di controllo, riducendone inoltre i costi di realizzazione.

Controllo in anello chiuso (feedback)

Un sistema di controllo in anello chiuso (in retroazione) determina il valore delle variabili di controllo sulla base dei valori di riferimento, delle variabili misurate, e dei valori delle uscite misurate. In generale, i vantaggi e gli svantaggi di questo approccio sono complementari rispetto al controllo in catena aperta.

I principali vantaggi risultano quindi essere:

- Possibilità di attenuare o reiettare completamente l'influenza di disturbi esterni sul sistema.
- Possibilità di far fronte (entro certi limiti) a variazioni interne al sistema o ad errori di modello.
- Possibilità di stabilizzare sistemi instabili in anello aperto.

Per contro, la configurazione ad anello chiuso presenta i seguenti svantaggi:

- Maggiore complessità della legge di controllo.
- Necessità di meccanismi di trasduzione sull'uscita e di conseguenza maggior costo.
- Rischio di rendere instabili sistemi stabili in anello aperto.
- Rischio di amplificare i disturbi di misura.

Nell'ambito del corso “*Sistemi di Controllo*” ci occuperemo essenzialmente di controllo in retroazione.

In molte applicazioni industriali, lo schema generale del sistema di controllo è quello riportato in Fig. 1.3.

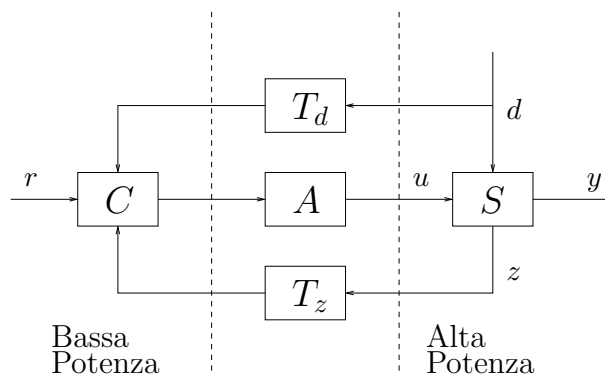


Figura 1.3: Schema generale del sistema di controllo.

Come si può vedere, tutto il sistema può essere diviso concettualmente in tre sezioni: la prima funziona ad un basso livello di potenza ed è finalizzata a calcolare il valore degli ingressi di controllo in base alle informazioni raccolte sul sistema (z e d) e all'andamento desiderato delle grandezze controllate. La seconda (il sistema S da controllare) funziona di solito ad un elevato livello di potenza. La terza include le interfacce tra le prime due ed include principalmente attuatori e trasduttori. I trasduttori (T_z e T_d) servono per trasformare le grandezze misurabili in segnali a bassa potenza (in genere elettrici), che possono essere elaborati da C . Gli attuatori (A) utilizzano i segnali di uscita del controllore per pilotare gli ingressi del sistema da controllare.

Quando viene sviluppato il progetto di un sistema di controllo, si devono affrontare diversi compiti, per svolgere i quali sono richiesti sia una preparazione di base che conoscenze specifiche relativamente a:

- costruzione di un modello matematico dell'impianto;
- attuatori e trasduttori disponibili sul mercato;
- requisiti sul comportamento da imporre alle variabili (specifiche di progetto).

Le decisioni che il progettista deve affrontare riguardano:

- scelte degli attuatori (A) e dei traduttori (T) più opportuni;
- programmazione di C ;
- interfacciamento delle varie componenti $T - C$, $C - A$ e $A - S$.

1.2 Rappresentazione dei sistemi dinamici

I sistemi dinamici vengono rappresentati tramite l'utilizzo di modelli matematici. Un modello matematico è in genere rappresentato da un insieme di equazioni che legano gli ingressi e le uscite. E' possibile classificare un modello in base alle sue caratteristiche:

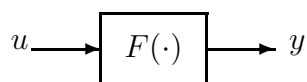
1. **Modello statico / dinamico:** un modello statico descrive il sistema trascurando il transitorio (esempio: caratteristica V-I di un diodo). Un modello dinamico è in grado di descrivere anche l'evoluzione transitoria del sistema. Nei controlli automatici si utilizzano di solito modelli dinamici. Da un punto di vista matematico, un modello statico è tale per cui il valore dell'uscita all'istante t dipende solo dagli ingressi u all'istante t stesso. Un modello è dinamico se il valore $y(t)$ dipende non solo da $u(t)$, ma anche da $u(\tau)$ per $\tau \leq t$.
2. **Modello lineare / non lineare:** un modello è lineare se soddisfa il principio di sovrapposizione degli effetti, cioè quando, essendo il sistema inizialmente in quiete, e dati due ingressi $u_1(t)$ e $u_2(t)$, a cui corrispondono le uscite $y_1(t)$ e $y_2(t)$, per ogni coppia di costanti k_1 e k_2 , la risposta all'ingresso $u(t) = k_1 u_1(t) + k_2 u_2(t)$ è data da $y(t) = k_1 y_1(t) + k_2 y_2(t)$. Un modello che non soddisfi questa proprietà è detto non lineare.
3. **Modello stazionario / non stazionario:** un modello è detto stazionario (o tempo invariante) se le uscite non dipendono dall'istante di tempo a cui l'ingresso è applicato, ovvero se, dato un qualsiasi ingresso $u(t)$ e la corrispondente uscita $y(t)$, si ha che l'uscita corrispondente all'ingresso $u(t - T)$ è $y(t - T)$. I modelli non stazionari, che non soddisfano la precedente condizione, sono anche detti tempo varianti.
4. **Modello causale / non causale:** un modello si dice causale se l'uscita all'istante τ dipende solo dagli ingressi agli istanti $t \leq \tau$, ma non da quelli agli istanti $t > \tau$. I modelli di sistemi fisici reali sono generalmente causali.

5. **Modello scalare / multivariabile:** un modello è scalare se ha un solo ingresso e una sola uscita (SISO: Single Input Single Output); è multivariabile se ha più ingressi e/o più uscite (MIMO: Multi Input Multi Output).
6. **Modello tempo continuo / tempo discreto / a dati campionati:** un modello è a tempo continuo se le sue variabili sono definite su tutto l'asse reale dei tempi. Un modello è a tempo discreto se le variabili sono definite solo per un insieme discreto di valori della variabile temporale. I modelli a dati campionati sono dei sistemi misti: hanno una parte continua ed una discreta (es: controllo di un sistema fisico tramite un computer); hanno al loro interno sistemi di conversione analogico/digitale e digitale/analogico indispensabili per interfacciare i vari componenti.
7. **Modelli a parametri concentrati / distribuiti:** un modello si dice a parametri concentrati se considera solo il comportamento dei fenomeni rispetto al tempo, ignorando quelli relativi allo spazio. Viceversa, un modello a parametri distribuiti considererà anche i fenomeni spaziali. Un modello a parametri concentrati è descritto da equazioni differenziali ordinarie, mentre un modello a parametri distribuiti è descritto da equazioni alle derivate parziali.

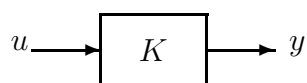
1.2.1 Rappresentazione con schemi a blocchi

Un modo compatto per descrivere i modelli dei sistemi è l'utilizzo degli schemi a blocchi. In questo caso il legame fra ingressi e uscite viene rappresentato tramite l'interconnessione di blocchi che contengono operatori (statici o dinamici) connessi tra loro da linee, che possono sommarsi o diramarsi.

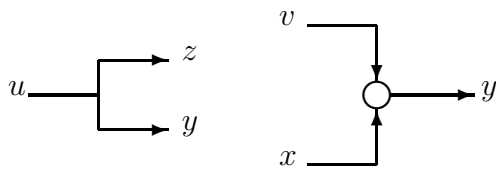
- Blocco elementare: $y = F(u)$.



- Blocco lineare: $F(u) = Ku$.



- Punto di diramazione e giunzione sommante.



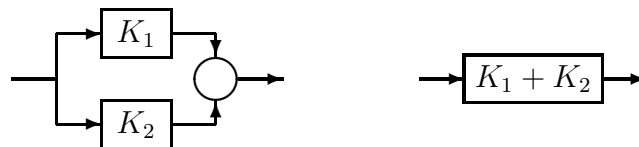
In presenza di una giunzione sommante, in mancanza di indicazioni sul segno delle frecce, si assumerà che l'uscita sia la somma degli ingressi. Nel caso si intenda invece effettuare una differenza, verrà esplicitamente indicato il segno “ $-$ ” a fianco del segnale da sottrarre. Da ora in avanti sarà sempre adottata questa convenzione.

Di seguito sono riportate le regole di semplificazione e trasformazione per blocchi lineari, aventi lo scopo di ottenere uno schema che presenti un numero minore di blocchi rispetto a quello originario.

1. Riduzione di blocchi in cascata:



2. Riduzione di blocchi in parallelo:



3. Riduzione di giunzioni sommanti:



4. Spostamento di un punto di prelievo di segnale a monte di un blocco:



5. Spostamento di un punto di prelievo di segnale a valle di un blocco:



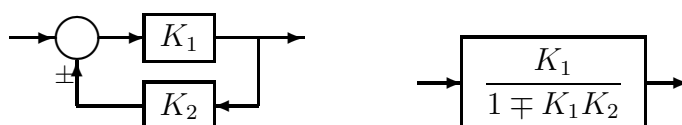
6. Spostamento di una giunzione sommante a monte di un blocco:



7. Spostamento di una giunzione sommante a valle di un blocco:



8. Eliminazione di un anello:



Osservazione: nel caso di uno schema a blocchi che presenti più ingressi/uscite, per valutare la funzione di trasferimento tra un ingresso ed una uscita specificata, è necessario porre a zero tutti gli altri ingressi. Nel caso generale di una retroazione negativa, la funzione di trasferimento equivalente risulta:

$$W(s) = \frac{F(s)}{1 + G(s)F(s)}$$

dove $F(s)$ è il prodotto dei blocchi sulla catena diretta, mentre $G(s)F(s)$ è il prodotto dei blocchi dell'intero anello di retroazione.

Esempio 1.1 (Motore in c.c. con comando in armatura)

Lo schema di una macchina elettrica in corrente continua con parametri parassiti è riportato in Fig. 1.4, in cui il circuito di eccitazione (contraddistinto con il pedice “e”) serve a generare il campo magnetico (vettore induzione), mentre quello di armatura (contraddistinto con il pedice “a”) è il circuito di potenza attraverso il quale la macchina assorbe energia elettrica e la trasforma in energia meccanica (funzionamento da motore). La resistenza R_p rappresenta le perdite per isteresi e correnti parassite, R_a e R_e le resistenze ohmiche, L_a e L_e le rispettive induttanze, ed e la forza elettromotrice indotta.

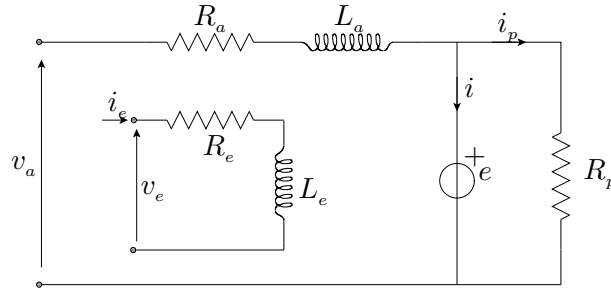


Figura 1.4: Schema di una macchina elettrica con parametri parassiti.

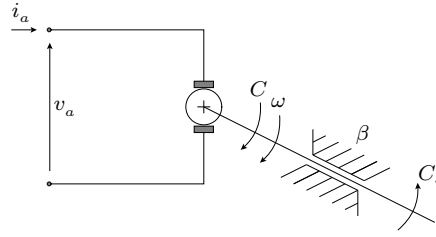


Figura 1.5: Macchina elettrica con carico.

Assumendo di applicare un carico meccanico all'albero del motore (Fig. 1.5), le equazioni del sistema reale diventano:

$$\begin{aligned}
 E &= k \Phi \omega \\
 C &= k \Phi I \\
 I_a &= I + I_p \\
 V_a &= E + (R_a + s L_a) I_a \\
 V_e &= (R_e + s L_e) I_e \\
 I_p &= \frac{E}{R_p} \\
 \Phi &\simeq k_e I_e \\
 C &= C_r + \omega(\beta + s J)
 \end{aligned}$$

dove C rappresenta la coppia motrice generata, C_r la coppia resistente, β le perdite per attrito meccanico e J il momento di inerzia complessivo dell'asse di rotazione con la massa trascinata.

E' possibile pilotare un motore elettrico agendo sulla tensione di armatura. Si assuma che il flusso magnetico Φ sia costante (come nel caso di motore in c.c. con magneti permanenti). In questo caso lo schema a blocchi risulta quello di Fig. 1.6.

E' possibile semplificare tale schema ponendo (Fig. 1.7):

$$\beta_c = \beta + k^2 \Phi^2 R_p^{-1}.$$

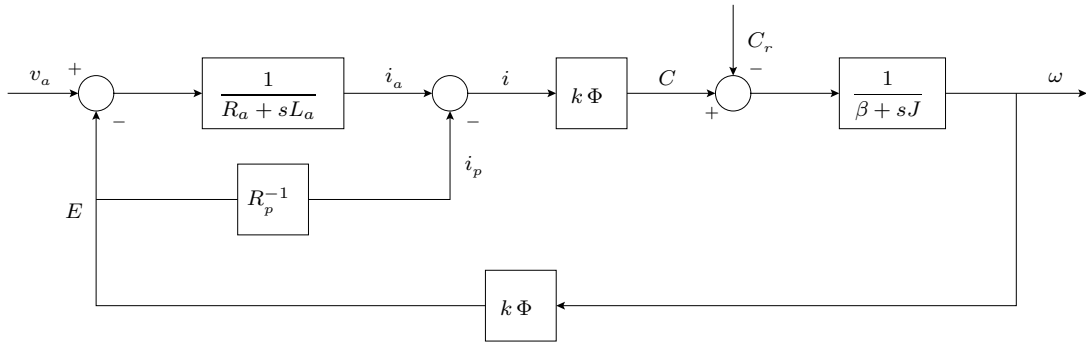


Figura 1.6: Schema a blocchi di un motore con comando in armatura.

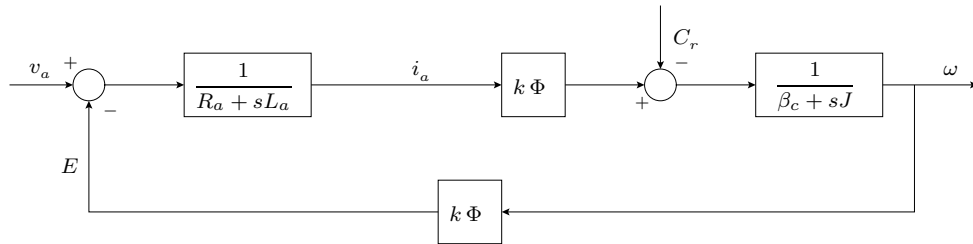


Figura 1.7: Schema a blocchi semplificato di un motore con comando in armatura.

Se la coppia C_r aumenta, cioè il motore gira più lentamente, allora si avrà un aumento della corrente di armatura I_a , che a sua volta produrrà un aumento della coppia motrice che tenderà a mantenere costante la velocità del motore (grazie alla retroazione).

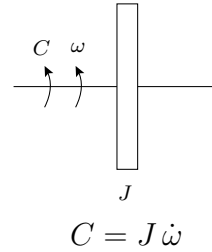
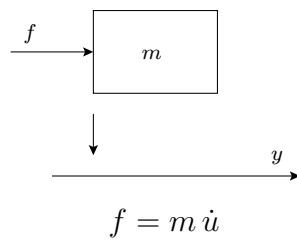
1.3 Modelli di sistemi meccanici (cenni)

In questo paragrafo sono descritti i principali modelli di sistemi meccanici, per i quali sarà utilizzata la seguente notazione:

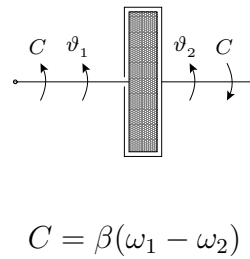
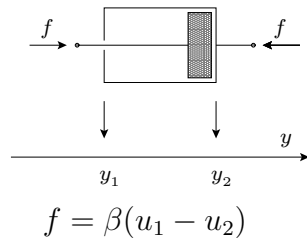
- $f = f(t)$ = forza
- $C = C(t)$ = coppia
- $y = y(t)$ = posizione lungo asse orientato
- $\theta = \theta(t)$ = posizione angolare orientata
- $u = u(t) = \dot{y}(t)$ = velocità di traslazione
- $\omega = \omega(t) = \dot{\theta}(t)$ = velocità angolare

Sistemi di riferimento inerziale

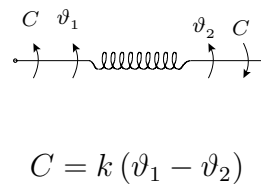
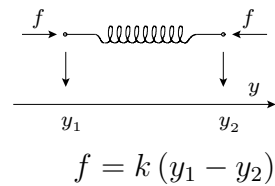
- Corpo rigido con massa prevalente.



- Ammortizzatore con attrito viscoso prevalente.

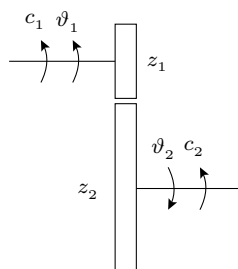


- Molla con elasticità prevalente.



Accoppiamenti cinematici

- Ruote dentate.

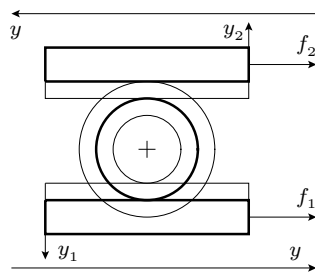


$$\tau = \frac{z_1}{z_2}$$

$$\vartheta_2 = \tau \vartheta_1$$

$$C_2 = \tau^{-1} C_1$$

- Meccanismo di rinvio.

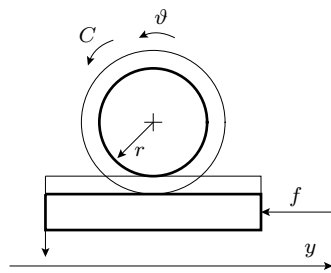


$$\tau = \frac{r_2}{r_1}$$

$$y_2 = \tau y_1$$

$$f_2 = \tau^{-1} f_1$$

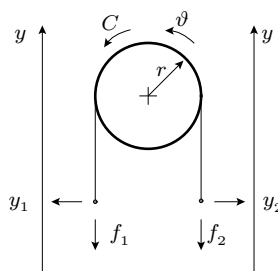
- Accoppiamento ruota - vite senza fine.



$$y = r \vartheta$$

$$f = r^{-1} C$$

- Puleggia.



$$y_2 = -y_1 = r \vartheta$$

$$f_2 - f_1 = r^{-1} C$$

Esempio 1.2

Dato il modello riportato in Fig. 1.8, vogliamo determinare la funzione di trasferimento tra la forza applicata f e la posizione della seconda massa y_2 .

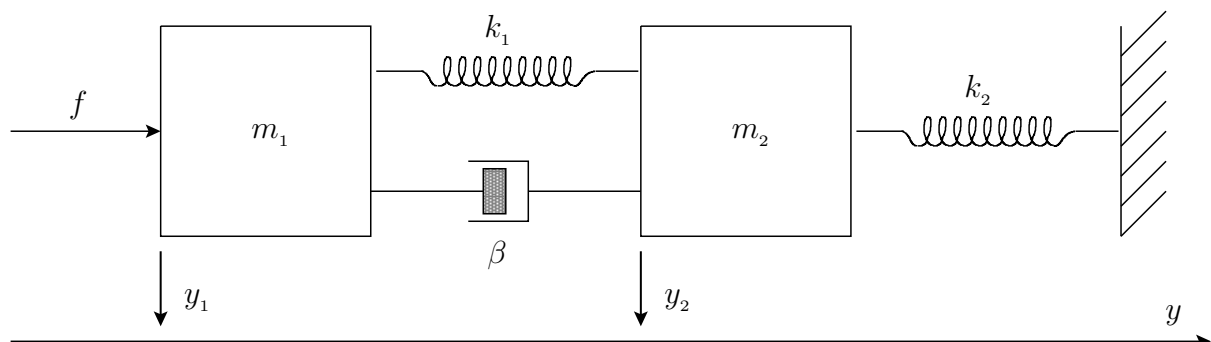


Figura 1.8: Esempio di sistema meccanico

Il modello matematico del sistema risulta determinato dalle equazioni dei componenti elementari e dalle equazioni di equilibrio dinamico:

$$\text{Massa } m_1: \quad f - k_1(y_1 - y_2) - \beta(u_1 - u_2) = m_1 \dot{u}_1 \quad (1.1)$$

$$\text{Massa } m_2: \quad k_1(y_1 - y_2) + \beta(u_1 - u_2) - k_2 y_2 = m_2 \dot{u}_2. \quad (1.2)$$

Risolvendo il sistema è possibile determinare la funzione di trasferimento desiderata:

$$G(s) = \frac{Y_2(s)}{F(s)} = \frac{\beta s + k_1}{m_1 m_2 s^4 + \beta(m_1 + m_2)s^3 + [k_1(m_1 + m_2) + k_2 m_1]s^2 + \beta k_2 s + k_1 k_2}$$

Vogliamo adesso trovare una rappresentazione in variabili di stato della forma

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

dove x denota il vettore di stato ed y l'uscita di interesse.

Dalla (1.1)-(1.2) è possibile scrivere

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = m_1^{-1}[-\beta u_1 + \beta u_2 - k_1 y_1 + k_1 y_2 + f] \\ \dot{u}_2 = m_2^{-1}[\beta u_1 - \beta u_2 + k_1 y_1 - (k_1 + k_2)y_2] \\ \dot{y}_1 = u_1 \\ \dot{y}_2 = u_2 \end{cases}$$

Una possibile definizione del vettore degli stati è la seguente:

$$x = [y_1 \quad u_1 \quad y_2 \quad u_2]'$$

Le matrici A , B , C , D per la rappresentazione in variabili di stato risultano quindi:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1}{m_1} & -\frac{\beta}{m_1} & \frac{k_1}{m_1} & \frac{\beta}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_1}{m_2} & \frac{\beta}{m_2} & -\frac{k_1+k_2}{m_2} & -\frac{\beta}{m_2} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \ 0 \ 1 \ 0], \quad D = 0.$$

E' noto che è possibile passare da una rappresentazione in variabili di stato ad una in funzione di trasferimento mediante la seguente formula

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D.$$