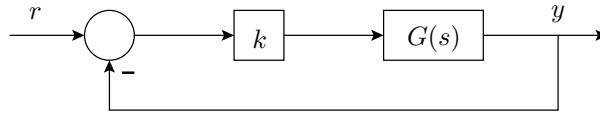


Esercizi sul luogo delle radici

Gli esercizi che seguono faranno riferimento allo schema a blocchi riportato di seguito.

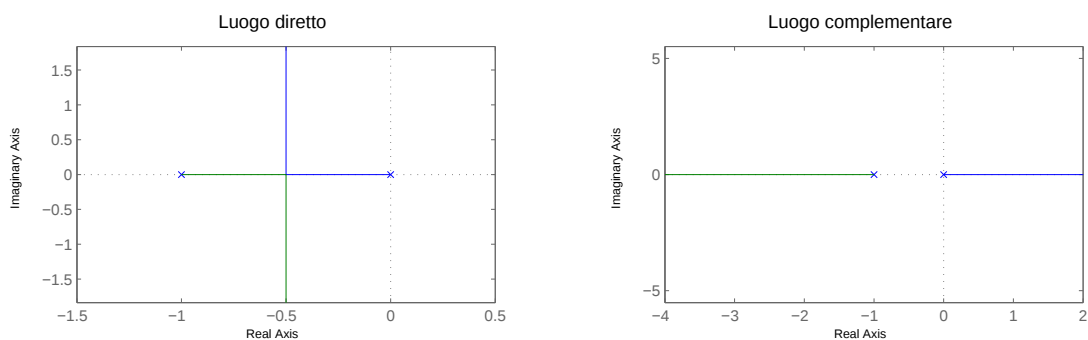


Esercizio 1. Sia data la seguente funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}.$$

- Tracciare il luogo delle radici e discutere la stabilità al variare del guadagno k .
- Verificare la correttezza del luogo delle radici tracciato studiando analiticamente le soluzioni del polinomio caratteristico.
- Verificare gli intervalli di stabilità mediante il criterio di Routh e di Nyquist.

Soluzione:



$$\text{Centro stella } s_0 = -\frac{1}{2}. \quad \text{Asintoti} = \begin{cases} -90^\circ, 90^\circ & \text{luogo diretto} \\ 0^\circ, 180^\circ & \text{luogo complementare} \end{cases}$$

- Stabilità:

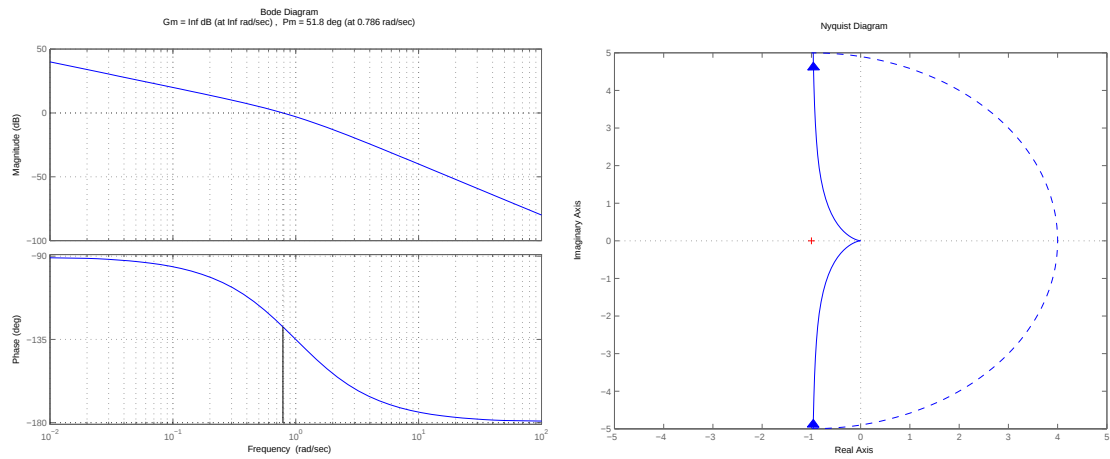
$$\begin{cases} k > 0 & \text{stabile} \\ k < 0 & \text{instabile con 1 polo a destra} \end{cases}$$

- Il polinomio caratteristico risulta: $s^2 + s + k = 0$ le cui radici sono

$$s_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4k}}{2}.$$

- Tabella di Routh

$$\begin{array}{c|cc} 2 & 1 & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & k & \end{array}$$



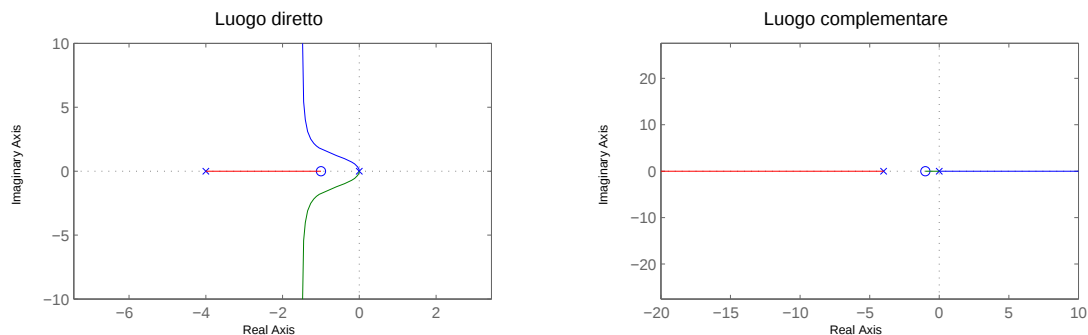
Poiché il margine di guadagno è infinito e il margine di fase è sempre positivo, si avrà stabilità per ogni $k > 0$.

Esercizio 2. Sia data la seguente funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{s+1}{s^2(s+4)}.$$

- Tracciare il luogo delle radici e discutere la stabilità al variare del guadagno k .
- Verificare gli intervalli di stabilità mediante il criterio di Routh e di Nyquist.

Soluzione:



$$\text{Centro stella } s_0 = -1.5. \quad \text{Asintoti} = \begin{cases} -90^\circ, 90^\circ & \text{luogo diretto} \\ 0^\circ, 180^\circ & \text{luogo complementare} \end{cases}$$

- Stabilità:

$$\begin{cases} k > 0 & \text{stabile} \\ k < 0 & \text{instabile con 1 polo a destra} \end{cases}$$

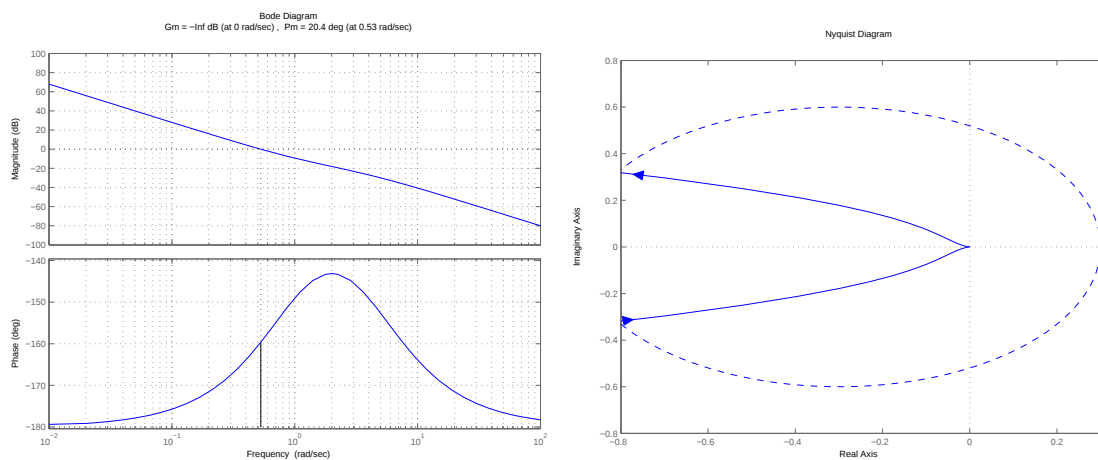
- Il polinomio caratteristico risulta: $s^3 + 4s^2 + ks + k$.

Tabella di Routh

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & k \\ 2 & 4 & k \\ 1 & 3k & 0 \\ 0 & k & \end{array}$$

Possiamo scrivere la $G(s)$ in forma di Bode come:

$$G(s) = \frac{s+1}{s^2(s+4)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1+s}{s^2 \left(1 + \frac{s}{4}\right)}.$$



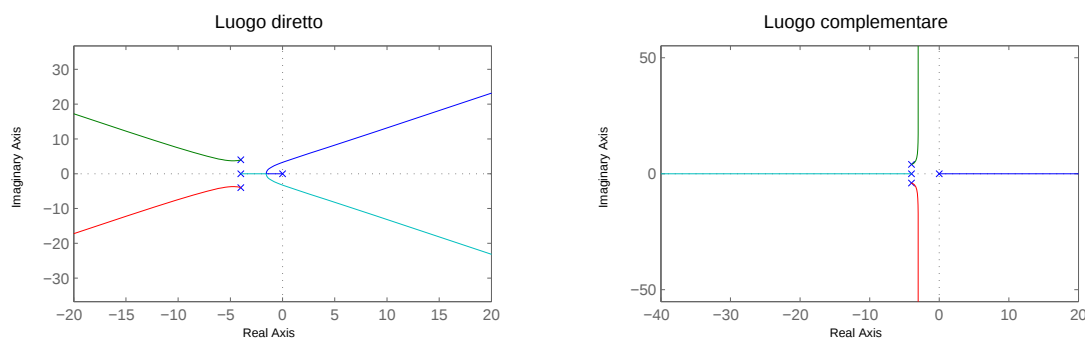
Poiché il margine di guadagno è infinito e il margine di fase è sempre positivo, si avrà stabilità per ogni $k > 0$.

Esercizio 3. Sia data la seguente funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1}{s(s+4)(s^2+8s+32)}.$$

- Tracciare il luogo delle radici e discutere la stabilità al variare del guadagno k .
- Verificare gli intervalli di stabilità mediante il criterio di Routh e di Nyquist.

Soluzione:



Centro stella $s_0 = -3$. Asintoti = $\begin{cases} 45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ & \text{luogo diretto} \\ 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ & \text{luogo complementare} \end{cases}$

- Stabilità:

$$\begin{cases} 0 < k < \bar{k} & \text{stabile} \\ k > \bar{k} & \text{instabile con 2 poli a destra} \\ k < 0 & \text{instabile con 1 polo a destra} \end{cases}$$

- Il polinomio caratteristico risulta: $s^4 + 12s^3 + 64s^2 + 128s + k = 0$.

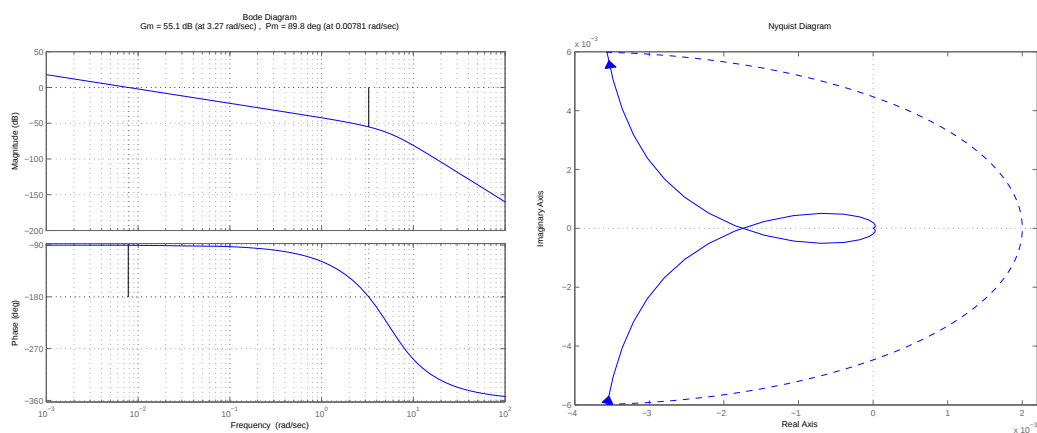
Tabella di Routh

4	1	64	k
3	12	128	0
2	160	$3k$	
1	$\frac{-36k+20480}{160}$		
0	$3k$		

Il sistema sarà stabile se $k > 0$ e $-36k + 20480 > 0$, ovvero $0 < k \lesssim 569$. Quindi $\bar{k} \simeq 569$.

Possiamo scrivere la $G(s)$ in forma di Bode come:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+4)(s^2+8s+32)} = \frac{1}{128} \cdot \frac{1}{s \left(1 + \frac{s}{4}\right) \left(1 + \frac{s}{4} + \frac{s^2}{32}\right)}.$$



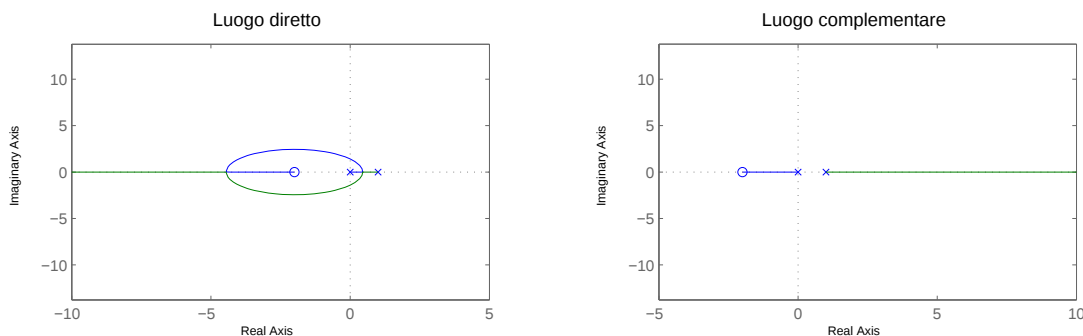
Il margine di guadagno risulta $\gamma_m = 55.1dB \simeq 569$. Il punto di intersezione del diagramma di Nyquist con l'asse reale sarà quindi $-1/\gamma_m \simeq -1.75 \cdot 10^{-3}$.

Esercizio 4. Sia data la seguente funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{s+2}{s(s-1)}.$$

- Tracciare il luogo delle radici e discutere la stabilità al variare del guadagno k .
- Verificare gli intervalli di stabilità mediante il criterio di Routh e di Nyquist.

Soluzione:



$$\text{Centro stella } s_0 = 3. \quad \text{Asintoti} = \begin{cases} 180^\circ & \text{luogo diretto} \\ 0^\circ & \text{luogo complementare} \end{cases}$$

- Stabilità:

$$\begin{cases} 0 < k < \bar{k} & \text{instabile con 2 poli a destra} \\ k > \bar{k} & \text{stabile} \\ k < 0 & \text{instabile con 1 polo a destra} \end{cases}$$

- Il polinomio caratteristico risulta: $s^2 - s + ks + 2 = 0$.

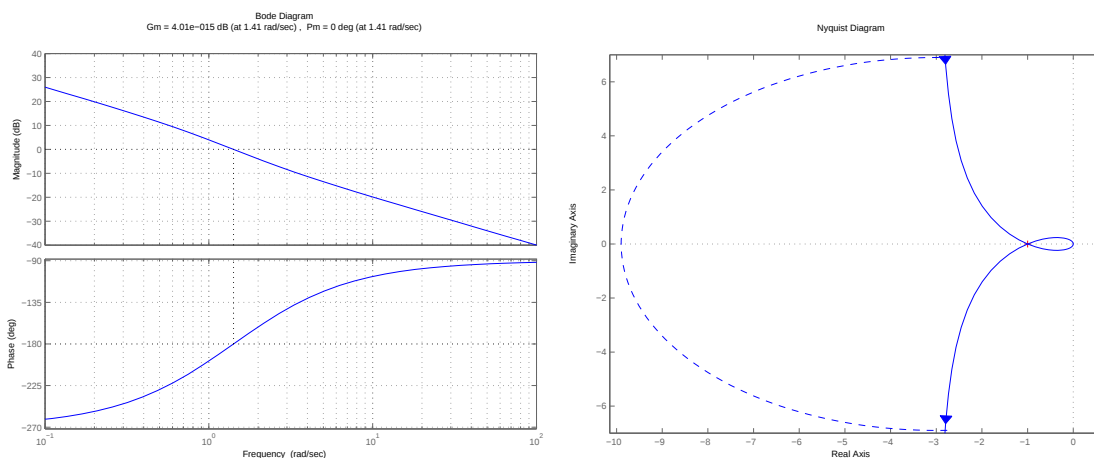
Tabella di Routh

$$\begin{array}{c|cc} 2 & 1 & 2 \\ 1 & k-1 & \\ 0 & 2 & \end{array}$$

Il sistema sarà stabile se $k > 1$. Quindi $\bar{k} = 1$.

Possiamo scrivere la $G(s)$ in forma di Bode come:

$$G(s) = \frac{s+2}{s(s-1)} = -2 \cdot \frac{1 + \frac{s}{2}}{s(1-s)}.$$



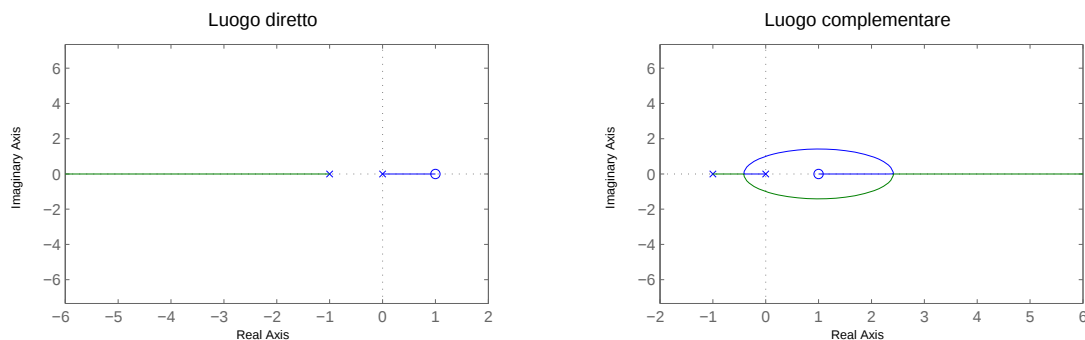
Il margine di guadagno risulta $\gamma_m = 0dB = 1$. Il punto di intersezione del diagramma di Nyquist con l'asse reale sarà quindi $-1/\gamma_m = -1$. Cosa possiamo concludere?

Esercizio 5. Sia data la seguente funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{s-1}{s(s+1)}.$$

- Tracciare il luogo delle radici e discutere la stabilità al variare del guadagno k .
- Verificare gli intervalli di stabilità mediante il criterio di Routh e di Nyquist.

Soluzione:



$$\text{Centro stella } s_0 = -2. \quad \text{Asintoti} = \begin{cases} 180^\circ & \text{luogo diretto} \\ 0^\circ & \text{luogo complementare} \end{cases}$$

- Stabilità:

$$\begin{cases} k > 0 & \text{instabile con 1 polo a destra} \\ \bar{k} < k < 0 & \text{stabile} \\ k < \bar{k} & \text{instabile con 2 poli a destra} \end{cases}$$

- Il polinomio caratteristico risulta: $s^2 + s + ks - k = 0$.

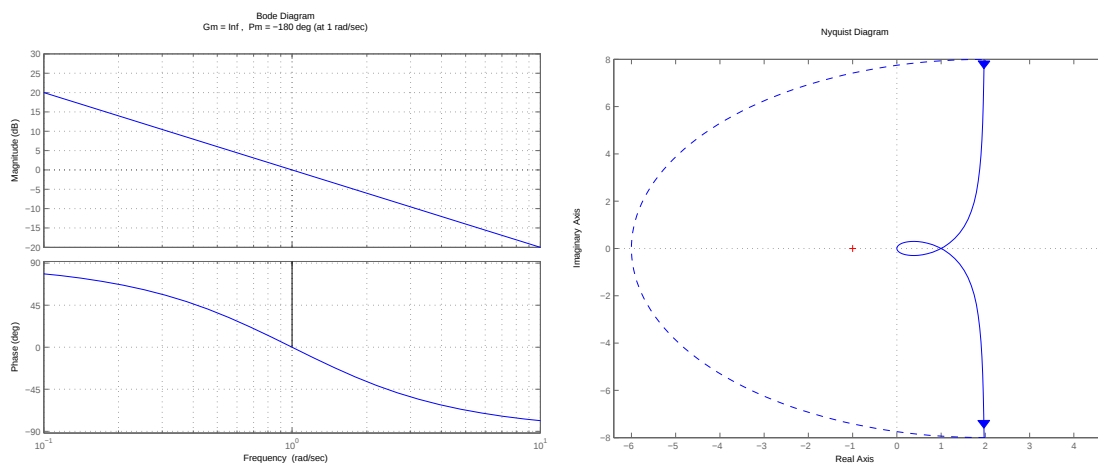
Tabella di Routh

$$\begin{array}{c|cc} 2 & 1 & -k \\ 1 & k+1 & \\ 0 & -k & \end{array}$$

Il sistema sarà stabile se $-1 < k < 0$. Quindi $\bar{k} = -1$.

Possiamo scrivere la $G(s)$ in forma di Bode come:

$$G(s) = \frac{s-1}{s(s+1)} = -\frac{1-s}{s(1+s)}.$$

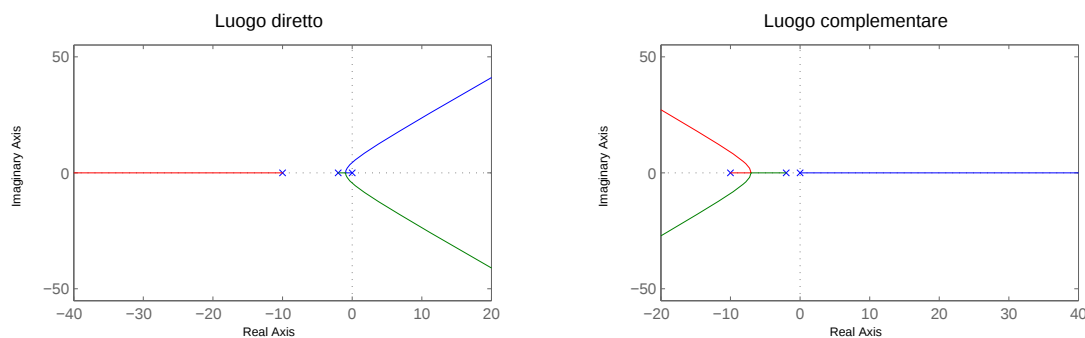


Esercizio 6. Sia data la seguente funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)(s+10)}.$$

- Tracciare il luogo delle radici e discutere la stabilità al variare del guadagno k .
- Verificare gli intervalli di stabilità mediante il criterio di Routh e di Nyquist.

Soluzione:



$$\text{Centro stella } s_0 = -4. \quad \text{Asintoti} = \begin{cases} -60^\circ, 60^\circ, 180^\circ & \text{luogo diretto} \\ -120^\circ, 0^\circ, 120^\circ & \text{luogo complementare} \end{cases}$$

- Stabilità:

$$\begin{cases} 0 < k < \bar{k} & \text{stabile} \\ k > \bar{k} & \text{instabile con 2 poli a destra} \\ k < 0 & \text{instabile con 1 polo a destra} \end{cases}$$

- Il polinomio caratteristico risulta: $s^3 + 12s^2 + 20s + k = 0$.

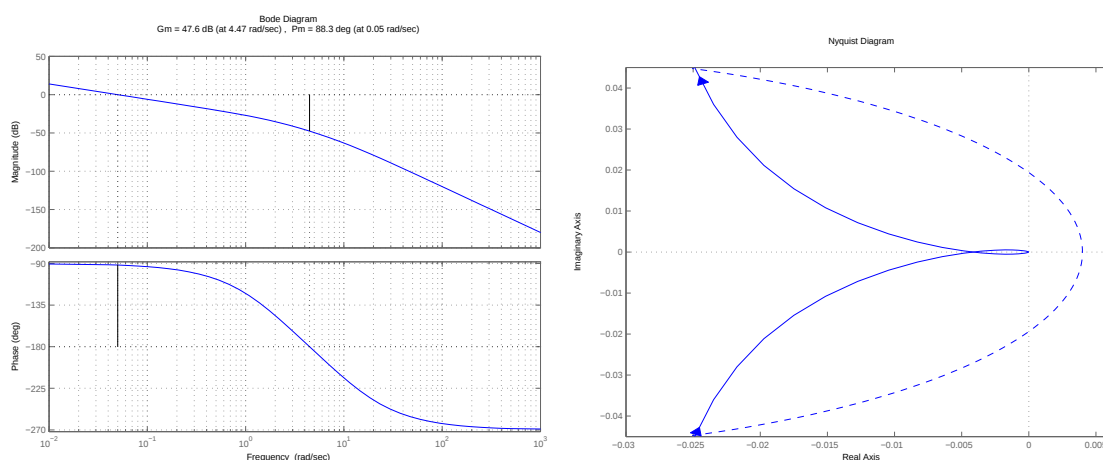
Tabella di Routh

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 20 \\ 2 & 12 & k \\ 1 & 240 - k & \\ 0 & k & \end{array}$$

Il sistema sarà stabile se $k > 0$ e $240 - k > 0$. Quindi $\bar{k} = 240$.

Possiamo scrivere la $G(s)$ in forma di Bode come:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)(s+10)} = \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{s \left(1 + \frac{s}{2}\right) \left(1 + \frac{s}{10}\right)}.$$



Il margine di guadagno risulta $\gamma_m = 47.6dB \simeq 240$. Il punto di intersezione del diagramma di Nyquist con l'asse reale sarà quindi $-1/\gamma_m \simeq 4.16 \cdot 10^{-3}$.