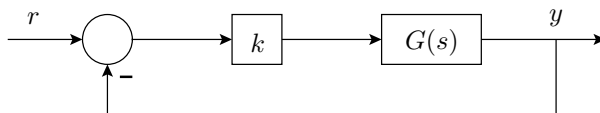


Esercizi sulla stabilità dei sistemi in retroazione

Gli esercizi che seguono faranno riferimento allo schema a blocchi riportato di seguito.



Esercizio 1. Sia data la seguente funzione di trasferimento

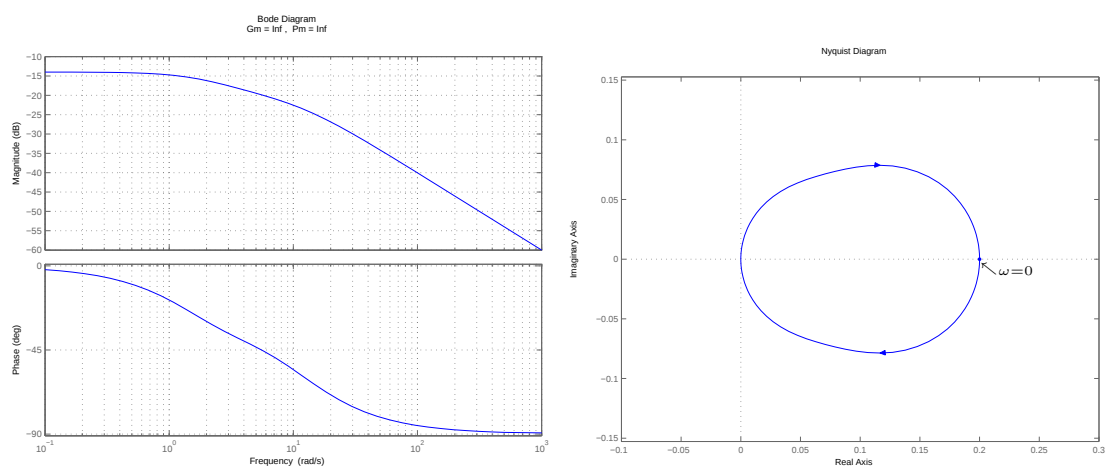
$$G(s) = \frac{s + 4}{(s + 2)(s + 10)}.$$

- Tracciare i diagrammi di Bode e Nyquist di $G(s)$.
- Discutere la stabilità dell'anello chiuso al variare di k mediante il criterio di Nyquist.
- Determinare gli intervalli di stabilità dell'anello chiuso mediante il criterio di Routh.

Soluzione: Possiamo scrivere la $G(s)$ in forma di Bode come:

$$G(s) = \frac{4}{20} \cdot \frac{1 + \frac{s}{4}}{\left(1 + \frac{s}{2}\right) \left(1 + \frac{s}{10}\right)}.$$

Risulta $k_B = 1/5 = 0.2 \simeq -14dB$.



- Stabilità:

$$\begin{cases} k > 0 & \text{stabile} \\ -5 < k < 0 & \text{stabile} \\ k < -5 & \text{instabile con 1 polo a destra} \end{cases}$$

- Il polinomio caratteristico risulta: $s^2 + (12 + k)s + (20 + 4k) = 0$.

Tabella di Routh

$$\begin{array}{c|cc} 2 & 1 & 20 + 4k \\ 1 & 12 + k & \\ 0 & 20 + 4k & \end{array}$$

Il sistema sarà stabile se $12 + k > 0$ e $20 + 4k > 0$, cioè se $k > -5$. In tutti gli altri casi avremo una variazione di segno e quindi un polo a destra.

Esercizio 2. Sia data la seguente funzione di trasferimento

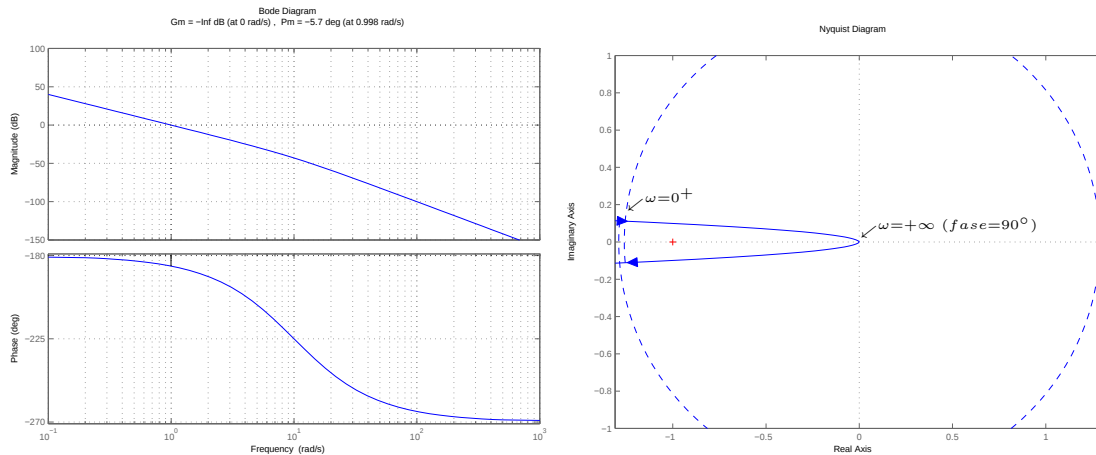
$$G(s) = \frac{10}{s^2(s + 10)}$$

- Tracciare i diagrammi di Bode e Nyquist di $G(s)$.
- Si provi a calcolare il valore dell'asintoto orizzontale del diagramma di Nyquist. Se tale asintoto non esiste, dimostrare comunque che la fase del diagramma per $\omega \rightarrow 0$ coincide con quella del diagramma tracciato.
- Discutere la stabilità dell'anello chiuso al variare di k mediante il criterio di Nyquist.
- Determinare gli intervalli di stabilità dell'anello chiuso mediante il criterio di Routh.

Soluzione: Possiamo scrivere la $G(s)$ in forma di Bode come:

$$G(s) = \frac{1}{s^2 \left(1 + \frac{s}{10}\right)}.$$

Risulta $k_B = 1$.



Il diagramma di Nyquist presenterà un asintoto orizzontale se $\lim_{\omega \rightarrow 0} \text{Im}[G(j\omega)]$ è finito.

$$G(j\omega) = \frac{10}{-\omega^2(j\omega + 10)} = \dots = \frac{-100}{\omega^2(100 + \omega^2)} + j \frac{10}{\omega(100 + \omega^2)}$$

$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{-1}{\omega^2} + j \frac{1}{10\omega}$, da cui $\lim_{\omega \rightarrow 0} \text{Im}[G(j\omega)] = +\infty$ per cui l'asintoto orizzontale non esiste.

Sia $\arctan2(y, x)$ la funzione inversa della tangente sui 4 quadranti¹. Si calcoli adesso la fase di $G(j\omega)$ per $\omega \rightarrow 0$:

$$\angle G(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \text{atan2}\left(\frac{1}{10\omega}, \frac{-1}{\omega^2}\right) = \pi + \lim_{\omega \rightarrow 0} \arctan\left(-\frac{\omega}{10}\right) = \pi + \arctan(0) = \pi$$

per cui la fase risulta essere in accordo con il diagramma.

¹vedi <http://it.wikipedia.org/wiki/Arcotangente2> o la funzione Matlab *atan2*.

- Stabilità:

$$\begin{cases} k > 0 & \text{instabile con 2 poli a destra} \\ k < 0 & \text{instabile con 1 polo a destra} \end{cases}$$

- Il polinomio caratteristico risulta: $s^3 + 10s^2 + 10k = 0$.

Tabella di Routh

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 10 & 10k \\ 1 & -k & \\ 0 & 10k & \end{array}$$

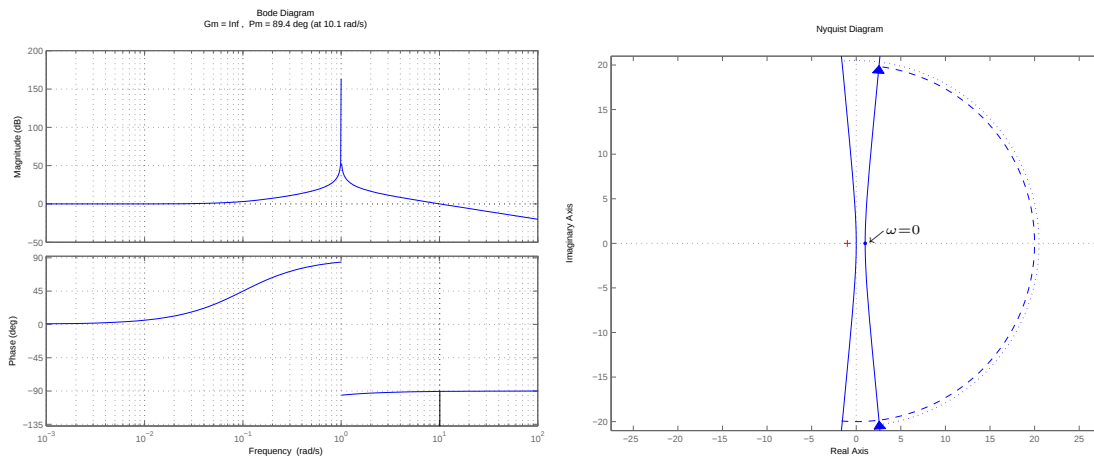
Per $k < 0$ avremo un polo instabile, mentre per $k > 0$ ne avremo due.

Esercizio 3. Sia data la seguente funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{10s + 1}{s^2 + 1}$$

- Tracciare i diagrammi di Bode e Nyquist di $G(s)$.
- Calcolare l'equazione dell'asintoto obliquo del diagramma di Nyquist.
- Discutere la stabilità dell'anello chiuso al variare di k mediante il criterio di Nyquist.
- Determinare gli intervalli di stabilità dell'anello chiuso mediante il criterio di Routh.

Soluzione: La $G(s)$ risulta essere già in forma di Bode ($k_B = 1$).



- Stabilità:

$$\begin{cases} k > 0 & \text{stabile} \\ -1 < k < 0 & \text{instabile con 2 poli a destra} \\ k < -1 & \text{instabile con 1 polo a destra} \end{cases}$$

Dal diagramma di Bode si può notare che la fase dell'asintoto è circa 84° . Tale fase è facilmente calcolabile in modo diretto valutando $\angle G(j1) = \arctan(10/1) \simeq 84^\circ$.

Se volessimo conoscere l'equazione esatta dell'asintoto è necessario applicare il procedimento descritto nelle dispense:

$$G(j\omega) = \frac{1 + j10\omega}{1 - \omega^2} = \underbrace{\frac{1}{1 - \omega^2}}_{X(\omega)} + j \underbrace{\frac{10\omega}{1 - \omega^2}}_{Y(\omega)} = X(\omega) + jY(\omega)$$

Assumendo che l'equazione dell'asintoto sia $Y = mX + n$, risulterà:

$$m = \lim_{\omega \rightarrow 1} \frac{\frac{dY(\omega)}{d\omega}}{\frac{dX(\omega)}{d\omega}} = \lim_{\omega \rightarrow 1} \frac{\frac{10(1-\omega^2)+20\omega^2}{(1-\omega^2)^2}}{\frac{2\omega}{(1-\omega^2)^2}} = \lim_{\omega \rightarrow 1} \frac{10 + 10\omega^2}{2\omega} = 10$$

da cui

$$n = \lim_{\omega \rightarrow 1} [Y(\omega) - mX(\omega)] = \lim_{\omega \rightarrow 1} \frac{10\omega}{1-\omega^2} - 10 \frac{1}{1-\omega^2} = \lim_{\omega \rightarrow 1} \frac{10\omega - 10}{1-\omega^2} = \lim_{\omega \rightarrow 1} \frac{-10(1-\omega)}{(1+\omega)(1-\omega)} = -5.$$

L'equazione dell'asintoto obliquo sarà quindi $Y = 10X - 5$.

- Il polinomio caratteristico risulta: $s^2 + 10k s + (1+k) = 0$.

Tabella di Routh

$$\begin{array}{c|cc} 2 & 1 & 1+k \\ 1 & 10k & \\ 0 & 1+k & \end{array}$$

Il sistema sarà stabile se $10k > 0$ e $1+k > 0$, cioè se $k > 0$.

Esercizio 4. Sia data la seguente funzione di trasferimento

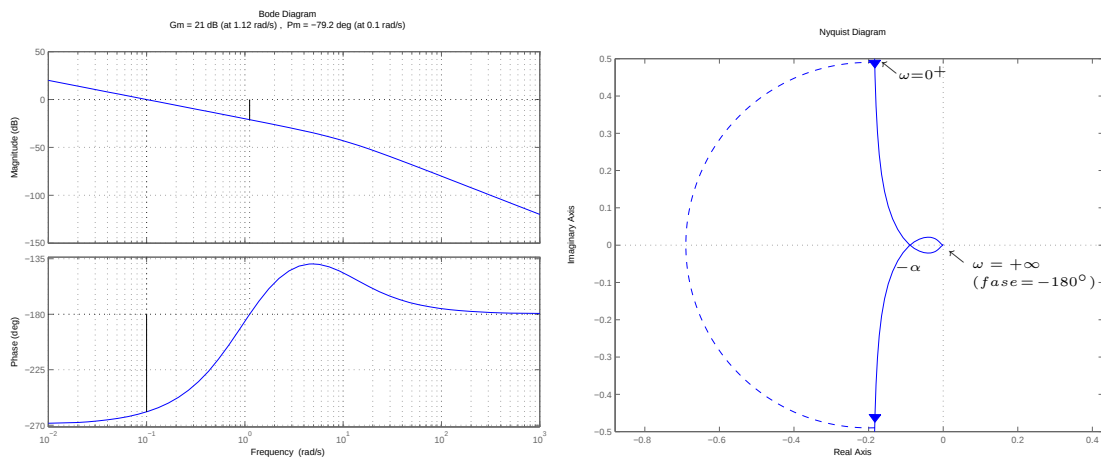
$$G(s) = \frac{s+1}{s(s-1)(s+10)}$$

- Tracciare i diagrammi di Bode e Nyquist di $G(s)$.
- Discutere la stabilità dell'anello chiuso al variare di k mediante il criterio di Nyquist.
- Determinare gli intervalli di stabilità dell'anello chiuso mediante il criterio di Routh.

Soluzione: Possiamo scrivere la $G(s)$ in forma di Bode come:

$$G(s) = \frac{1}{-10} \cdot \frac{1+s}{s(1-s)\left(1+\frac{s}{10}\right)}.$$

Risulta $k_B = -0.1$, per cui $|k_B| = -20dB$.



- Stabilità:

$$\begin{cases} k > \frac{1}{\alpha} & \text{stabile} \\ 0 < k < \frac{1}{\alpha} & \text{instabile con 2 poli a destra} \\ k < 0 & \text{instabile con 1 polo a destra} \end{cases}$$

- Il polinomio caratteristico risulta: $s^3 + 9s^2 + (k - 10)s + k = 0$.

Tabella di Routh

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & k-10 \\ 2 & 9 & k \\ 1 & 8k-90 & \\ 0 & k & \end{array}$$

Il sistema sarà stabile se $8k - 90 > 0$ e $k > 0$, cioè se $k > \frac{45}{8}$. Possiamo quindi affermare che $\alpha = \frac{4}{45}$.

Esercizio 5. Sia data la seguente funzione di trasferimento

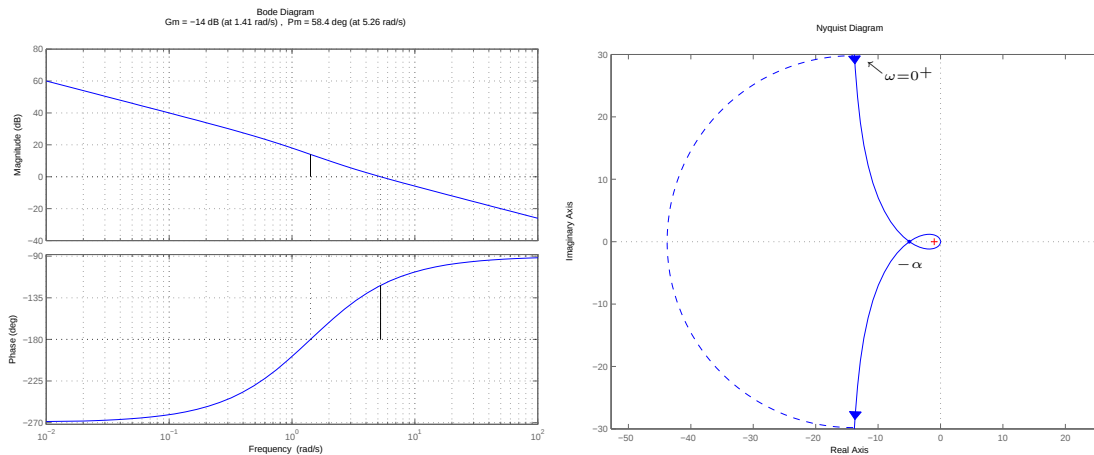
$$G(s) = 5 \frac{s+2}{s(s-1)}$$

- Tracciare i diagrammi di Bode e Nyquist di $G(s)$.
- Discutere la stabilità dell'anello chiuso al variare di k mediante il criterio di Nyquist.
- Determinare gli intervalli di stabilità dell'anello chiuso mediante il criterio di Routh.

Soluzione: Possiamo scrivere la $G(s)$ in forma di Bode come:

$$G(s) = \frac{5 \cdot 2}{-1} \cdot \frac{1 + \frac{s}{2}}{s(1-s)} = -10 \cdot \frac{1 + \frac{s}{2}}{s(1-s)}.$$

Risulta $k_B = -10$, per cui $|k_B| = 20dB$.



E' possibile calcolare analiticamente il valore dell'asintoto verticale

$$asintoto = \lim_{\omega \rightarrow 0} \operatorname{Re}[G(j\omega)] = \lim_{\omega \rightarrow 0} \operatorname{Re} \left[-\frac{10 + 5j\omega}{\omega^2 + j\omega} \right] = \dots = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{-15\omega^2}{\omega^4 + \omega^2} = -15.$$

- Stabilità:

$$\begin{cases} k > \frac{1}{\alpha} & \text{stabile} \\ 0 < k < \frac{1}{\alpha} & \text{instabile con 2 poli a destra} \\ k < 0 & \text{instabile con 1 polo a destra} \end{cases}$$

- Il polinomio caratteristico risulta: $s^2 + (5k - 1)s + 10k = 0$.

Tabella di Routh

$$\begin{array}{c|cc} 2 & 1 & 10k \\ 1 & 5k-1 & \\ 0 & 10k & \end{array}$$

Il sistema sarà stabile se $k > 0$ e $5k - 1 > 0$, cioè se $k > \frac{1}{5}$. Possiamo quindi affermare che $\alpha = 5$.

Esercizio 6. Sia data la seguente funzione di trasferimento

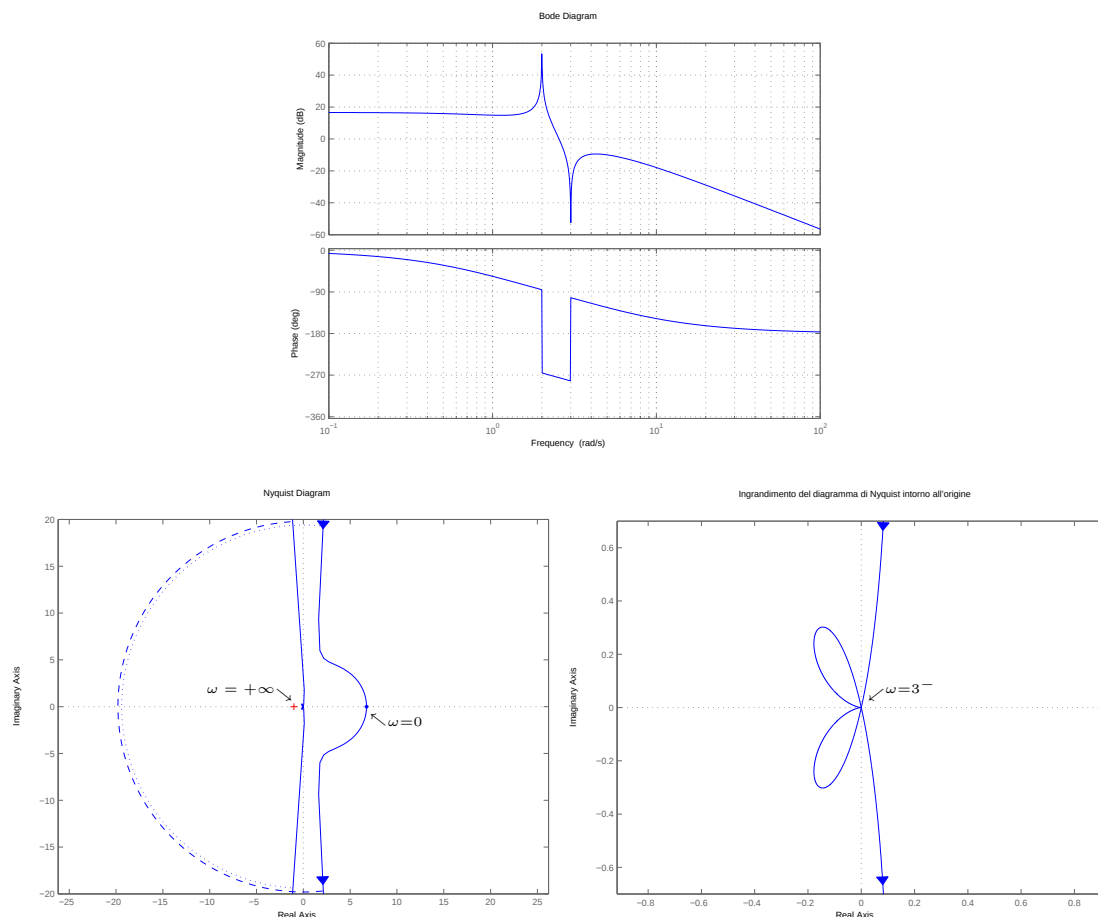
$$G(s) = \frac{3(s^2 + 9)}{(1 + s)(s^2 + 4)(1 + 0.2s)}$$

- Tracciare i diagrammi di Bode e Nyquist di $G(s)$.
- Discutere la stabilità dell'anello chiuso al variare di k mediante il criterio di Nyquist.
- Determinare gli intervalli di stabilità dell'anello chiuso mediante il criterio di Routh.

Soluzione: Possiamo scrivere la $G(s)$ in forma di Bode come:

$$G(s) = \frac{3 \cdot 9}{4} \cdot \frac{1 + \frac{s^2}{9}}{(1 + s) \left(1 + \frac{s^2}{4}\right) (1 + 0.2s)}.$$

Risulta $k_B = \frac{27}{4} = 6.75 \simeq 17dB$.



- Stabilità:

$$\begin{cases} k > 0 & \text{instabile con 2 poli a destra} \\ k < -\frac{1}{\alpha} & \text{instabile con 1 polo a destra} \\ -\frac{1}{\alpha} < k < 0 & \text{stabile} \end{cases}$$

- Il polinomio caratteristico risulta: $0.2s^4 + 1.2s^3 + (1.8 + 3k)s^2 + 4.8s + (4 + 27k) = 0$.

Tabella di Routh

4	1	$9 + 15k$	$20 + 135k$	(ho moltiplicato la riga per 5)
3	1	4		(ho diviso la riga per 1.2)
2	$1 + 3k$	$4 + 27k$		(ho diviso la riga per 5)
1	$\frac{-k}{1+3k}$			(ho diviso la riga per 15)
0	$4 + 27k$			

Il sistema sarà stabile se $(1 + 3k) > 0$, $k < 0$ e $(4 + 27k) > 0$, cioè se $-\frac{4}{27} < k < 0$. Possiamo quindi affermare che $\alpha = 27/4$.

Esercizio 7. Sia data la seguente funzione di trasferimento

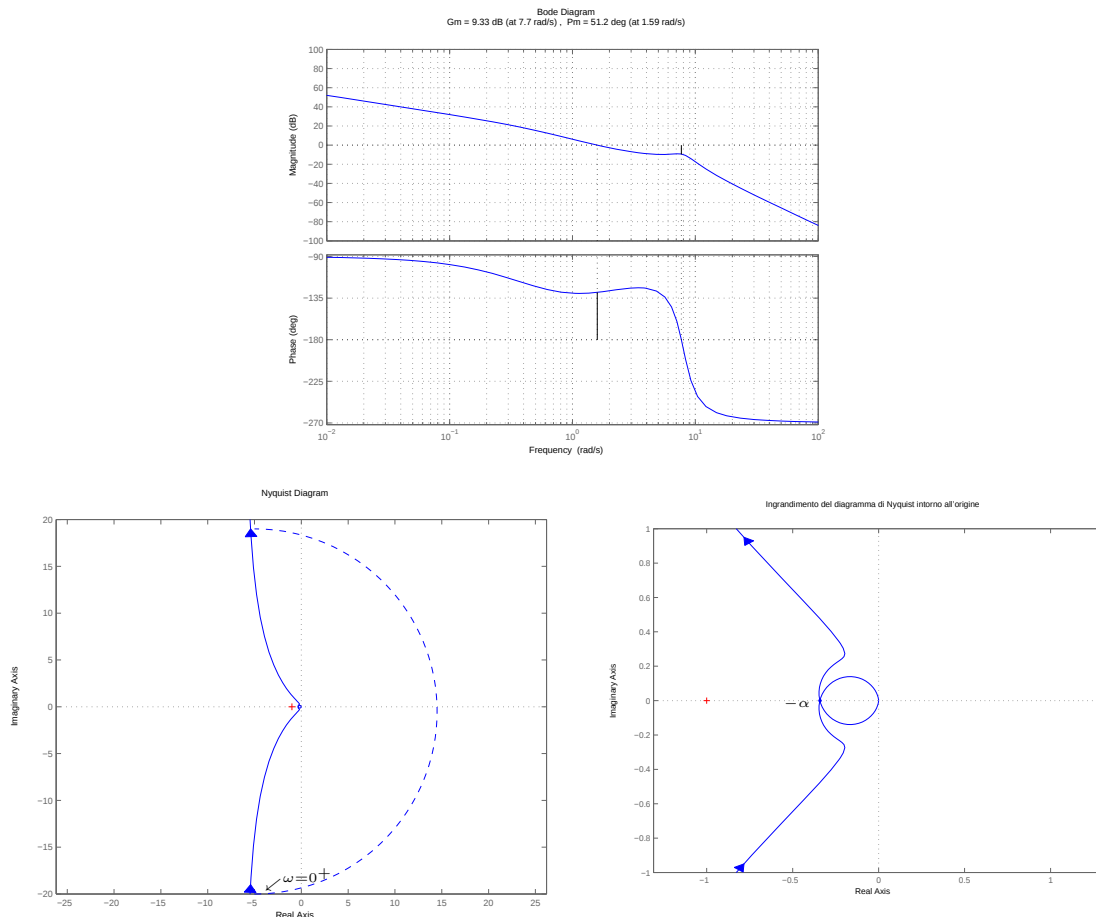
$$G(s) = \frac{64(s+2)}{s(s+0.5)(s^2+3.2s+64)}$$

- Tracciare i diagrammi di Bode e Nyquist di $G(s)$.
- Discutere la stabilità dell'anello chiuso al variare di k mediante il criterio di Nyquist.

Soluzione: Possiamo scrivere la $G(s)$ in forma di Bode come:

$$G(s) = \frac{64 \cdot 2}{0.5 \cdot 64} \cdot \frac{1 + \frac{s}{2}}{s \left(1 + \frac{s}{0.5}\right) \left(1 + \frac{3.2s}{64} + \frac{s^2}{64}\right)} = 4 \cdot \frac{1 + \frac{s}{2}}{s \left(1 + \frac{s}{0.5}\right) \left(1 + \frac{3.2s}{64} + \frac{s^2}{64}\right)}$$

Risulta $k_B = 4 \simeq 12dB$. I poli complessi hanno $\omega_n = 8$, $\xi = 0.2$.



- Stabilità:

$$\begin{cases} k > \frac{1}{\alpha} & \text{instabile con 2 poli a destra} \\ 0 < k < \frac{1}{\alpha} & \text{stabile} \\ k < 0 & \text{instabile con 1 polo a destra} \end{cases}$$

Poiché il margine di guadagno è di circa $9.33dB$, risulta che $\alpha \simeq 0.34$.

Esercizio 8. Sia data la seguente funzione di trasferimento

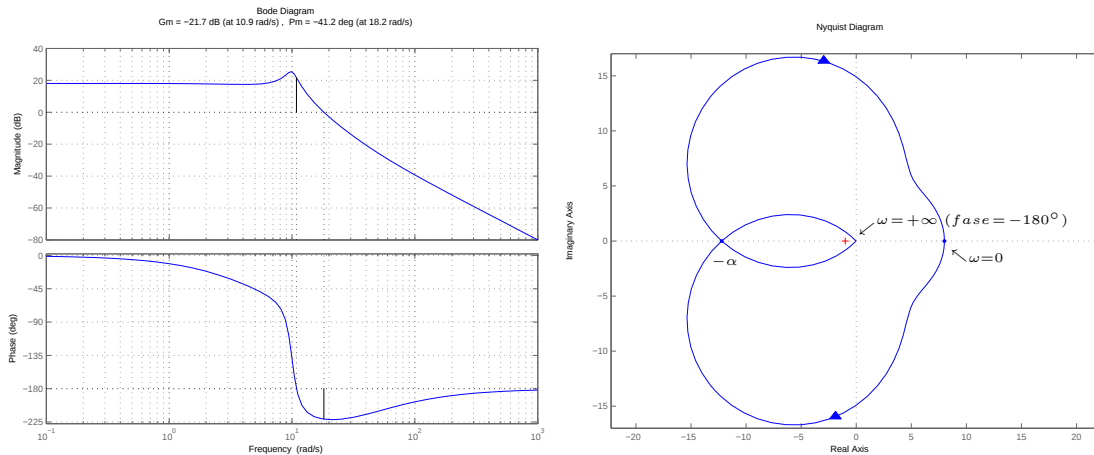
$$G(s) = 100 \frac{s + 40}{(s + 5)(s^2 + 2s + 100)}$$

- Tracciare i diagrammi di Bode e Nyquist di $G(s)$.
- Discutere la stabilità dell'anello chiuso al variare di k mediante il criterio di Nyquist.
- Determinare gli intervalli di stabilità dell'anello chiuso mediante il criterio di Routh.

Soluzione: Possiamo scrivere la $G(s)$ in forma di Bode come:

$$G(s) = \frac{100 \cdot 40}{5 \cdot 100} \cdot \frac{1 + \frac{s}{40}}{\left(1 + \frac{s}{5}\right) \left(1 + \frac{2s}{100} + \frac{s^2}{100}\right)} = 8 \cdot \frac{1 + \frac{s}{40}}{\left(1 + \frac{s}{5}\right) \left(1 + \frac{2s}{100} + \frac{s^2}{100}\right)}$$

Risulta $k_B = 8 \simeq 18dB$.



- Stabilità:

$$\begin{cases} k > \frac{1}{\alpha} & \text{instabile con 2 poli a destra} \\ 0 < k < \frac{1}{\alpha} & \text{stabile} \\ -\frac{1}{8} < k < 0 & \text{stabile} \\ k < -\frac{1}{8} & \text{instabile con 1 polo a destra} \end{cases}$$

- Il polinomio caratteristico risulta: $s^3 + 7s^2 + (110 + 100k)s + (500 + 4000k) = 0$.

Tabella di Routh

3	1	$110 + 100k$	
2	7	$500 + 4000k$	
1	$9 - 110k$		(ho diviso la riga per 30)
0	$1 + 8k$		(ho diviso la riga per 500)

Il sistema sarà stabile se $9 - 110k > 0$ e $1 + 8k > 0$, cioè se $-\frac{1}{8} < k < \frac{9}{110}$. Possiamo quindi affermare che $\alpha = 110/9$.